Catálogo

3002192 METODOS NUMÉRICOS
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL, 5 DE ABRIL DE 2006

NOMBRE____________________________CARNÉ_________

PROFESOR___________________________GRUPO____PUNTAJE____

ESTE ES UN EXAMEN EN EL QUE QUEREMOS EVALUAR SU CAPACIDAD PARA PLANTEAR LOS METODOS NUMERICOS PRESENTADOS EN CLASE. POR TANTO LE PEDIMOS QUE ESCRIBA TODOS LOS PASOS INTERMEDIOS, QUE ES LO QUE NOS INTERESA CALIFICAR.

1. Considere el PVI

$$\begin{aligned} y' &= 2y\,(sen\,(t)) + 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

a. (10%) Demuestre que tiene solución única en el intervalo $[0,1]$.
b. (20%) Utilice un paso del método clásico de Runge-Kutta de orden 4 para obtener una aproximación de la solución $y(t)$ en el punto $t = 0.1$.

2. El PVI

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + y &= t^2 - 4 \\ y(0) &= -1, \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

modela la elongación $y(t)$ y la velocidad de cambio $y'(t)$ de un resorte.
a. (15%) Convierta este PVI a la forma

$$\begin{aligned} u' &= F(t,u) \\ u(0) &= \alpha \end{aligned}$$

con u y α vectores de $\mathbb{R}^2$.
b. (15%) Aplique un paso del método de Euler para aproximar la elongación y la velocidad del resorte en $t = 0.1$.

3. (40%) Sea $R = \{(x,y) / \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$ y considere el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } R \\ u(x,y) &= 9\left(x^2 - y^2\right) \text{ en la frontera de } R. \end{aligned}$$

Aplique el método de diferencias finitas con tamaño de paso $h = k = \frac{1}{3}$ en ambos ejes para calcular valores aproximados de $u(x,y)$ en los puntos interiores de la malla. Precise todos los puntos de la malla y escriba en forma matricial el sistema lineal asociado con el problema dado. NO RESUELVA EL SISTEMA.

AYUDA: Para el PVI

$$\begin{aligned} u' &= F(t,u) \\ u(0) &= \alpha \end{aligned}$$

que puede ser escalar o vectorial y para $h > 0$, se define:
1. Método de Euler: $w^{(0)} = \alpha, \quad w^{(j+1)} = w^{(j)} + hF\left(t_j, w^{(j)}\right)$
2. Método clásico de Runge-Kutta orden 4:
$w^{(0)} = \alpha, \quad w^{(j+1)} = w^{(j)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, donde
$k_1 = hF\left(t_j, w^{(j)}\right), \quad k_2 = hF\left(t_j + \frac{h}{2}, w^{(j)} + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hF\left(t_j + \frac{h}{2}, w^{(j)} + \frac{k_2}{2}\right)$ y
$k_4 = hF\left(t_j + h, w^{(j)} + k_3\right)$

UNIVERSIDAD NACIONAL, MEDELLIN
METODOS NUMERICOS 3002192
OCTUBRE 7 DE 2006, SEGUNDO PARCIAL

NOMBRE____________________________CARNÉ______GRUPO___

1. (15%) La tabla de diferencias divididas para el polinomio interpolante de una función $f(x)$ definida en $[0, 0.7]$ está dada por

$x_0 = 0$	$f[x_0]$		
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$	$f[x_1, x_2] = 10$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$

Encuentre $f[x_0]$, $f[x_1]$ y $f[x_0, x_1]$.

2. (15%) Una cercha cúbica sujeta S para una función $f(x)$ definida en $[1, 3]$ está dada por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, & 1 \le x \le 2 \\ S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Si $f'(1) = f'(3)$, encuentre a, b, c y d.

3. La recta de regresión, que es la que mejor se aproxima en mínimos cuadrados a una colección de datos $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{N}$, es $y = Ax + B$. Sus coeficientes A y B son la solución del sistema de ecuaciones normales

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right) A + \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) B &= \sum_{k=1}^{N} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) A + NB &= \sum_{k=1}^{N} y_k \end{aligned}$$

a. (15%) Sean

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \text{ y } \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k$$

las medias aritméticas para los puntos $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{N}$. Pruebe que el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ está en la recta de regresión determinada por el conjunto de puntos dado.

b. (15%) Encuentre A y B, los coeficientes de la recta de regresión, sabiendo que los datos están dados por la siguiente tabla

x_j	2	3	4
y_j	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{17}$

4. (20%) Determine las constantes w_1, x_0 y x_1 de manera que la regla de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

sea exacta para todos los polinomios de grado ≤ 3.

5. (20%) Se utiliza el método de Romberg para aproximar $\int_2^3 f(x)\,dx$. La tabla es:

$$\begin{array}{lll} R(0,0) & & \\ R(1,0) & R(1,1) & \\ R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) \end{array}$$

Se sabe que $f(2) = 0.51342$, $f(3) = 0.36788$, $R(2,0) = 0.43687$ y $R(2,2) = 0.43662$. Encuentre $f(2.5)$.

METODOS NUMERICOS 3002192
SEMESTRE 02, 2006, SOLUCION DEL PARCIAL 2

1. La tabla de diferencias divididas es

$x_0 = 0$	$f[x_0]$		
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$	$f[x_1, x_2] = 10$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$

   Para hallar $f[x_0, x_1]$ despejamos de $\frac{50}{7} = \frac{10-f[x_0,x_1]}{0.7}$ y obtenemos $f[x_0, x_1] = 5$.

   Para hallar $f[x_1]$ despejamos de $10 = \frac{6-f[x_1]}{0.3}$ para obtener $f[x_1] = 3$.

   Para hallar $f[x_0]$ despejamos de $5 = \frac{3-f[x_0]}{0.4}$ para obtener $f[x_0] = 1$.

2. De los dos polinomios que conforman la función $S(x)$ se sabe:

$$\begin{aligned}
S_0'(x) &= 3 + 4(x-1) - 3(x-1)^2 \\
S_0''(x) &= 2c - 6(x-1) \\
S_1'(x) &= b + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2 \\
S_1''(x) &= 2c + 6d(x-2)
\end{aligned}$$

   Como $S_0(2) = 4 = S_1(2) = a$, entonces $a = 4$.
   Como $S_0'(2) = 4 = S_1'(2) = b$, entonces $b = 4$.
   Como $S_0''(2) = -2 = S_1''(2) = 2c$, entonces $c = -1$.
   Como $S_0'(1) = 3 = f'(1) = f'(3) = S_1'(3) = b + 2c + 3d$, entonces $d = \frac{1}{3}$.

3. a. De la segunda de las ecuaciones normales obtenemos $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k\right) A + B = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k$ que corresponde a $A\bar{x} + B = \bar{y}$.

   b. El sistema es $29A + 9B = \frac{159}{170}$ y $9A + 3B = \frac{61}{170}$ y su solución es $A = -\frac{6}{85}$ y $B = \frac{169}{510}$.

4. Obtenemos las 3 incógnitas x_0, x_1 y w_1 por medio de evaluaciones en los polinomios 1, x y x^2. Después vemos que la fórmula de cuadratura obtenida también es exacta para x^3.

   $\int_0^1 1dx = 1 = \frac{1}{2} + w_1$, de donde $w_1 = \frac{1}{2}$.

   $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x_0 + w_1 x_1$, de donde $1 = x_0 + x_1$ y asi $x_1 = 1 - x_0$.

   $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x_0^2 + w_1 x_1^2$, de donde $\frac{2}{3} = x_0^2 + (1-x_0)^2$. Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ y $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ que tienen la importante propiedad de sumar 1. Mejor dicho, si la primera es x_0, la segunda es x_1 y viceversa. La fórmula de cuadratura es $\frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$. Al evaluarla en $f(x) = x^3$, resulta $\frac{1}{4}$ que es precisamente $\int_0^1 x^3dx$.

5. Usamos aproximaciones a lo largo del proceso, lo que interesa es el método.

   $R(0,0) = \frac{1}{2}[f(2) + f(3)] = 0.4406$

   $R(1,0) = \frac{R(0,0)}{2} + \frac{1}{2}f(2.5) = 0.2203 + \frac{1}{2}f(2.5)$

   $R(1,1) = \frac{1}{3}[4R(1,0) - R(0,0)] = 0.1469 + \frac{2}{3}f(2.5)$

   $R(2,1) = \frac{1}{3}[4R(2,0) - R(1,0)] = 0.5091 - \frac{1}{6}f(2.5)$

   $R(2,2) = 0.43662 = \frac{1}{15}[16R(2,1) - R(1,1)] = 0.5332 - \frac{2}{9}f(2.5)$

   Luego $f(2.5) = \frac{9}{2}(0.5332 - 0.43662) = 0.4348$.

UNIVERSIDAD NACIONAL, MEDELLIN
METODOS NUMERICOS 3002192
ABRIL 14 DE 2007, SEGUNDO PARCIAL

NOMBRE____________________________CARNÉ______GRUPO___

DURACION DEL EXAMEN: 1 HORA Y 50 MINUTOS.
TODA RESPUESTA DEBE ESTAR JUSTIFICADA EN LA HOJA DE EXAMEN.
POR FAVOR, NO HAGA PREGUNTAS SOBRE EL EXAMEN A LOS VIGILANTES DE LAS AULAS

NOTA: El ejercicio 5 tiene un literal con puntaje extra que es opcional. Si alguien queda con puntaje por encima del 100% en este examen, el puntaje extra se le cuenta para alguno otro examen del semestre.

1. (15%) La tabla de diferencias divididas para el polinomio interpolante de una función $f(x)$ definida en $[0, 0.7]$ está dada por

$x_0 = 0$	$f[x_0]$		
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$	$f[x_1, x_2] = 10$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$

   Encuentre $f[x_0]$, $f[x_1]$ y $f[x_0, x_1]$.

2. (15%) Supongamos $f(-0.5) = f(0.5) = b$. Determine b a partir de los siguientes hechos:
   a. La regla trapezoidal compuesta con $n = 2$ para $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ da el valor 1.5.
   b. La regla trapezoidal compuesta con $n = 4$ para $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ da el valor 1.55.

3. (15%) La función $f(x) = e^x$ se aproxima con su polinomio de Taylor de grado 6 alrededor de $x_0 = 0$. Encuentre una cota *razonable* para el valor absoluto del error en esta aproximación sabiendo que se trabaja en el intervalo $|x| \leq 1$.

4. (15%)
   a. Pruebe que el polinomio interpolante $p(x)$ de la siguiente tabla tiene grado 3.

x_j	-2	0	1	2	4
y_j	-12	4	3	4	36

   b. Calcule $p(3)$.

5. Se sabe que los primeros polinomios de Chebyshev son $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$ y que para calcular $T_k(x)$ para $k = 2, 3, ...$ se utiliza la relación de recurrencia $T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$.
   a. (10%) Utilice esta relación de recurrencia para hallar $T_3(x)$.
   b. (10%) Use los ceros de $T_3(x)$ como nodos de interpolación en el intervalo $[-1, 1]$ y obtenga el polinomio interpolante de grado a los más dos de la función $f(x) = x^4$.
   c. (10% puntaje extra) ¿Cuáles son los correspondientes tres nodos de interpolación de Chebyshev en el intervalo $[0, 2]$?

6. (20%) Determine valores de A, B y C que hagan que la expresión

$$Af(0) + Bf(1) + Cf(2)$$

   sea una fórmula de cuadratura para la integral

$$\int_0^2 xf(x)\,dx$$

   que es exacta para todos los polinomios de grado tan alto como sea posible. ¿Cuál es el grado máximo?

METODOS NUMERICOS 3002192
SEMESTRE 01, 2007, SOLUCION DEL PARCIAL 2

1. La tabla de diferencias divididas es

$x_0 = 0$	$f[x_0]$		
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$	$f[x_1, x_2] = 10$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$

Para hallar $f[x_0, x_1]$ despejamos de $\frac{50}{7} = \frac{10 - f[x_0,x_1]}{0.7}$ y obtenemos $f[x_0, x_1] = 5$.

Para hallar $f[x_1]$ despejamos de $10 = \frac{6 - f[x_1]}{0.3}$ para obtener $f[x_1] = 3$.

Para hallar $f[x_0]$ despejamos de $5 = \frac{3 - f[x_0]}{0.4}$ para obtener $f[x_0] = 1$.

2. Para $n = 2$, $h = 1$ y tenemos $1.5 = \frac{1}{2}[f(-1) + f(1) + 2f(0)]$.
Para $n = 4$, $h = \frac{1}{2}$ y la cuadratura es $1.55 = \frac{1}{4}[f(-1) + f(1) + 2f(0) + 2f(-0.5) + 2f(0.5)]$. Por tanto,
$1.55 = \frac{1}{2}(1.5) + b$ y asi $b = 0.8$.

3. $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo n entero ≥ 0.
$|E_6(x)| = \left|\dfrac{f^{(7)}(c)\, x^7}{7!}\right| = \dfrac{e^c |x|^7}{7!} \leq \frac{e}{7!} \leq 5.4 \times 10^{-4}$. Otra alternativa razonable es acotar
$\frac{e}{7!} \leq \frac{3}{7!} \leq 6 \times 10^{-4}$.

4. a. El polinomio interpolante de la tabla es único. Por cualquier medio que lo encontremos, su grado es el grado que necesitamos. Por el método de diferencias divididas de Newton llegamos al resultado de la siguiente manera:

-2	-12				
0	4	8			
1	3	-1	-3		
2	4	1	1	1	
4	36	16	5	1	0

$p(x) = -12 + 8(x+2) - 3(x+2)x + (x+2)x(x-1) = x^3 - 2x^2 + 4$. Su grado es 3.
b. $p(3) = 13$.

5. a. $T_2(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$.
b. Sus raices se encuentran directamente haciendo $4x^3 - 3x = 0$ o usando la fórmula $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{6}\right)$. Las raices son $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 y $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se pide el polinomio interpolante de la tabla

x_j	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$y_j = x_j^4$	$\frac{9}{16}$	0	$\frac{9}{16}$

y lo obtenemos por diferencias divididas:

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9}{16}$		
0	0	$-\frac{9}{8\sqrt{3}}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{8\sqrt{3}}$	$\frac{3}{4}$

$p(x) = \frac{9}{16} - \frac{9}{8\sqrt{3}}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x$.
c. (EXTRA) $0 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq t \leq 1$. La recta del cambio de variable es $x = t + 1$. Los nodos de Chebyshev en el nuevo intervalo son $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 y $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Para $1 : \int_0^2 x(1)\,dx = 2 = A + B + C$
Para $x : \int_0^2 x(x)\,dx = \frac{8}{3} = B + 2C$
Para $x^2 : \int_0^2 x(x^2)\,dx = 4 = B + 4C$
De las dos últimas ecuaciones encontramos $B = \frac{4}{3}$ y $C = \frac{2}{3}$. De la primera vemos que $A = 0$. La nueva cuadratura es $Q[f] = \frac{4}{3}f(1) + \frac{2}{3}f(2)$. Sirve hasta polinomios de grado 2 solamente pues $\int_0^2 x(x^3)\,dx = \frac{32}{5} \neq \frac{4}{3} + \frac{2}{3}(8)$. El grado más alto es 2.

Universidad Nacional de Colombia
Escuela de Matemáticas, 20 de octubre de 2007
Segundo Examen Parcial de Métodos Numéricos **(25%)**
Duración: 1 hora y 50 minutos

Nombre: __________________________________ Carné: ___________ Grupo: ___

1. (15%) Determine los pesos w_0, w_1 y el nodo x_1 de modo que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión más alto posible. Indique el procedimiento utilizado.

2. (20%) Determine el número mínimo de subintervalos que se requiere para que la regla de Simpson compuesta permita obtener un valor de la integral

$$\int_2^6 \ln(x-1)\,dx$$

con una precisión de 5×10^{-9}. (*Ayuda*: $E_S(f,h) = -\dfrac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c)$).

3. (25%) Sea S la *cercha cúbica* que interpola los puntos de la tabla

x_k	-1	2	5	7
y_k	5	14	2	-8

y tal que $S''(-1) = 1$ y $S''(7) = 7$. Halle $S(x)$ para $x \in [5,7]$. Justifique su respuesta.
(*Ayuda*: $S''(5) = -\dfrac{35}{37}$)

4. (20%) **Señale** la única respuesta verdadera en cada una de las siguientes preguntas (no necesita justificar)

   i. (8%) Uno de los nodos de Chebyshev para aproximar a f en $[-3,4]$ por medio de un polinomio interpolante de grado menor o igual que 3 es aproximadamente:
   a. -0.9239 b. 1.8394 c. 0.5 d. 0.866

   ii. (6%) El valor de A que hace que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^2 x f(x)\,dx \approx -\frac{3}{4} f(-1) + \frac{9}{8} f(0) + A f(2)$$

   sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2 es:
   a. $\dfrac{9}{8}$ b. $\dfrac{21}{8}$ c. $-\dfrac{3}{4}$ d. $\dfrac{3}{8}$

   iii. (6%) Para los datos

x_k	2	5	8	12
y_k	1	2	-3	-8

   el polinomio de Lagrange $L_2(x)$ está dado por:
   a. $\dfrac{1}{72}(x-2)(x-5)(x-12)$ b. $\dfrac{1}{72}(2-x)(5-x)(12-x)$
   c. $\dfrac{1}{63}(x-2)(x-8)(x-12)$ d. $\dfrac{1}{63}(2-x)(8-x)(12-x)$

continúa atrás

5. (20%) Para los datos

x_k	-2	-1	0	1	2	3	4
$y_k = f(x_k)$	-39	1	1	3	25	181	801

la tabla de diferencias divididas es

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
-2 & -39 & & & & & & \\
-1 & 1 & 40 & & & & & \\
0 & 1 & 0 & -20 & & & & \\
1 & 3 & 2 & 1 & 7 & & & \\
2 & 25 & 22 & 10 & 3 & -1 & & \\
3 & 181 & 156 & 67 & 19 & 4 & 1 & \\
4 & 801 & 620 & 232 & \alpha & 9 & 1 & 0
\end{array}
$$

Utilice esta tabla para encontrar y **señalar** la única respuesta verdadera en cada una de las siguientes preguntas (no necesita justificar)

i. (6%) El coeficiente de x en el polinomio interpolante para $f(x)$ en los nodos 1, 2 y 3 es:
   a. 22 b. -201 c. -179 d. -45

ii. (7%) Si p_3 es el polinomio interpolante para $f(x)$ en los nodos -2, -1, 0 y 1, entonces $p_3(-3)$ es:
   a. 181 b. -181 c. 161 d. -161

iii. (7%) El valor de α en la tabla de diferencias divididas es:
   a. 82.5 b. 55 c. 165 d. 41.25

Fórmulas de cercha cúbica

Sistema:

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k, \qquad k = 1, ..., n-1$$

Coeficientes de los polinomios:

$$
\begin{aligned}
s_{k,0} &= y_k \\
s_{k,1} &= d_k - \frac{h_k}{6}(2m_k + m_{k+1}) \\
s_{k,2} &= \frac{m_k}{2} \\
s_{k,3} &= \frac{m_{k+1} - m_k}{6h_k}
\end{aligned}
$$

Solución Segundo Parcial de Métodos Numéricos 02-2007

1. Consideramos la fórmula de cuadratura $\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(x_1)$.

$$\text{Si } f(x) = 1, \qquad 1 = x|_0^1 = \int_0^1 1dx = w_0 + w_1$$

$$\text{si } f(x) = x, \qquad \frac{1}{2} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \int_0^1 x\ dx = w_1 x_1$$

$$\text{si } f(x) = x^2, \qquad \frac{1}{3} = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \int_0^1 x^2 dx = w_1 x_1^2$$

así

$$\frac{1}{3} = (w_1 x_1)\, x_1 = \frac{1}{2} x_1 \qquad x_1 = \frac{2}{3} \qquad w_1 = \frac{3}{4} \qquad w_0 = \frac{1}{4}$$

luego

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{4} f(0) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3}\right).$$

2. Buscamos el mínimo número de subintervalos tal que $|E_S(f,h)| \leq 5\times 10^{-9}$, es decir, $\left|-\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c)\right| \leq 5\times 10^{-9}$ para $f(x) = \ln(x-1)$, $x, c \in [2,6]$.

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

$f^{(5)}(x) = \dfrac{24}{(x-1)^5} > 0$ para $x \in [2,6]$, luego $f^{(4)}$ es funcion creciente de valores negativos, esto es, $\left|f^{(4)}(c)\right|$ alcanza su valor máximo en $x = 2$, $\left|f^{(4)}(c)\right| \leq 6$. Luego

$$\left|-\frac{6-2}{180}\left(\frac{6-2}{n}\right)^4 f^{(4)}(c)\right| \leq \frac{1}{45}\frac{4^4}{n^4} 6 = \frac{512}{15n^4}$$

$$\frac{512}{15n^4} \leq 5\times 10^{-9} \qquad \frac{512\times 10^9}{15\times 5} \leq n^4 \qquad 287.44 \leq n$$

así el mínimo número de subintervalos es $n = 288$.

3. Si S es la *cercha cúbica* que interpola los puntos de la tabla

x_k	-1	2	5	7
y_k	5	14	2	-8

entonces

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x), & x \in [-1,2] \\ s_1(x), & x \in [2,5] \\ s_2(x), & x \in [5,7] \end{cases}$$

Nos piden $S(x)$ para $x \in [5,7]$, es decir, nos piden $s_2(x)$. Sabemos que $S''(-1) = 1$, $S''(7) = 7$ y $S''(5) = -\frac{35}{37}$

$$m_0 = 1 \qquad m_2 = -\frac{35}{37} \qquad m_3 = 7$$

ademas $h_2 = 2$ y $d_2 = -5$

$$s_{2,0} = y_2 = 2$$

$$s_{2,1} = d_2 - \frac{h_2}{6}(2m_2 + m_3) = -5 - \frac{2}{6}\left(2\left(-\frac{35}{37}\right) + 7\right) = -\frac{248}{37} = -6.7027$$

$$s_{2,2} = \frac{m_2}{2} = \frac{-\frac{35}{37}}{2} = -\frac{35}{74} = -0.47297$$

$$s_{2,3} = \frac{m_3 - m_2}{6h_2} = \frac{7 + \frac{35}{37}}{6(2)} = \frac{49}{74} = 0.66216$$

luego

$$s_2\left(x\right) = 2 - \frac{248}{37}\left(x-5\right) - \frac{35}{74}\left(x-5\right)^2 + \frac{49}{74}\left(x-5\right)^3.$$
$$s_2\left(x\right) = 2 - 6.7027\left(x-5\right) - 0.47297\left(x-5\right)^2 + 0.66216\left(x-5\right)^3$$

4. .

   i. Uno de los nodos de Chebyshev para aproximar a f en $[-3,4]$ es $\mathbf{1.8394}$.
   Uno de los nodos de Chebyshev para aproximar a f en $[-3,2]$ es $-\mathbf{1.4567}$.

   ii. La fórmula de cuadratura es $\int_{-1}^{2} xf\left(x\right)dx \approx -\mathbf{\frac{3}{4}}f\left(-1\right) + \mathbf{\frac{9}{8}}f\left(0\right) + \mathbf{\frac{9}{8}}f\left(2\right)$

   iii. El polinomio de Lagrange $L_1\left(x\right)$ está dado por $\mathbf{\frac{1}{63}\left(x-2\right)\left(x-8\right)\left(x-12\right)}$.
   El polinomio de Lagrange $L_2\left(x\right)$ está dado por $\mathbf{\frac{1}{72}\left(2-x\right)\left(5-x\right)\left(12-x\right)}$.

5. .

   i. El coeficiente de x en el polinomio interpolante para $f\left(x\right)$ en los nodos 1, 2 y 3 es $-\mathbf{179.}$

   ii. Si p_3 es el polinomio interpolante para $f\left(x\right)$ en los nodos -2, -1, 0 y 1, entonces $p_3\left(-3\right) = -\mathbf{161}$.
   Si p_3 es el polinomio interpolante para $f\left(x\right)$ en los nodos -2, -1, 0 y 1, entonces $p_3\left(2\right) = \mathbf{49}$.

   iii. El valor de α en la tabla de diferencias divididas es **55**.
   El valor de β en la tabla de diferencias divididas es **19**.

Universidad Nacional de Colombia
Escuela de Matemáticas, 29 de octubre de 2007
Supletorio Segundo Examen Parcial de Métodos Numéricos **(25%)**
Duración: 1 hora y 50 minutos

Nombre: _________________________________Carné: __________ Grupo: ___

TODA RESPUESTA DEBE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA
NO SE ACEPTAN PREGUNTAS DURANTE EL DESARROLLO DE ESTE EXAMEN

1. (25%) Determine valores de A, B y C que hagan que la fórmula de cuadratura:
$$\int_{-1}^{2} xf(x)\,dx \approx Af(-1) + Bf(1) + Cf(2)$$
sea exacta para todos los polinomios de grado tan alto como sea posible. ¿Cuál es el grado de precisión de la fórmula obtenida?

2. (25%) Una *cercha cúbica* S para una función $f(x)$ definida en $[-3,1]$ está dada por
$$S(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}(x+3)^3 - \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{20}{3}(x+3) - 7, & -3 \le x \le -1 \\ a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3, & -1 \le x \le 1 \end{cases}$$
Si $S''(1) = 1$, encuentre a, b, c y d. Escriba una tabla de interpolación para esta cercha.

3. (20%) Si $f(x) = \ln(5-x)$ se aproxima en $[1,3]$ mediante el polinomio interpolante de grado menor igual que 3 empleando los nodos de Chebyshev, encuentre una cota *razonable* para el valor absoluto del error en esta aproximación.
Ayuda: $|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \le \frac{2(b-a)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} \max\limits_{a\le x\le b}\left\{\left|f^{(n+1)}(x)\right|\right\}$.

4. (15%) Para los datos

x_k	2	5	8	12
$f(x_k)$	1	2	-3	-8

halle el polinomio interpolante de Lagrange y uselo para aproximar $f(6)$.

5. (15%) Para los datos

x_k	-3	-2	-1	0	1	3	5
$y_k = f(x_k)$	4096	729	64	1	0	64	4096

la tabla de diferencias divididas es

-3	4096						
-2	729	-3367					
-1	64	-665	1351				
0	1	-63	301	-350			
1	0	-1	31	-90	65		
3	64	32	11	α	17	-8	
5	4096	2016	496	97	17	0	1

Utilice esta tabla para encontrar:

i. (10%) El polinomio interpolante $p(x)$ para $f(x)$ en los nodos -2, -1, 0 y 1.
ii. (5%) El valor de α en la tabla de diferencias divididas.

Solución Supletorio Segundo Parcial de Métodos Numéricos 02-2007

1. Consideramos la fórmula de cuadratura $\int_{-1}^{2} xf(x)\,dx \approx Af(-1)+Bf(1)+Cf(2)$.

$$\text{Si } f(x)=1, \qquad \frac{3}{2}=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}=\int_{-1}^{2} x\,dx = A+B+C$$

$$\text{si } f(x)=x, \qquad 3=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}=\int_{-1}^{2} x^2dx = -A+B+2C$$

$$\text{si } f(x)=x^2, \qquad \frac{15}{4}=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{2}=\int_{-1}^{2} x^3dx = A+B+4C$$

resolviendo el sistema $A=-\frac{3}{8}$, $B=\frac{9}{8}$ y $C=\frac{3}{4}$. La fórmula de cuadratura será

$$\int_{-1}^{2} xf(x)\,dx \approx -\frac{3}{8}f(-1)+\frac{9}{8}f(1)+\frac{3}{4}f(2)$$

Para saber el grado de precisión

$$\text{si } f(x)=x^3, \qquad \frac{33}{5}=\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{2} \stackrel{?}{=} \int_{-1}^{2} x^4dx = -\frac{3}{8}(-1)^3+\frac{9}{8}(1)^3+\frac{3}{4}(2)^3$$

$$\frac{33}{5}\neq\frac{15}{2}$$

luego el grado de precisión es 2.

2. Si S esta dada por

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=-\frac{2}{3}(x+3)^3-\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{20}{3}(x+3)-7, & -3\leq x\leq -1 \\ S_1(x)=a+b(x+1)+c(x+1)^2+d(x+1)^3, & -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

se deben cumplir las condiciones

$$S_0(-1)=S_1(-1), \qquad S_0'(-1)=S_1'(-1), \qquad S_0''(-1)=S_1''(-1)$$

y $S''(1)=S_1''(1)=1$.

$$S_0'(x)=-2(x+3)^2-(x+3)+\frac{20}{3} \qquad S_0''(x)=-4(x+3)-1$$
$$S_1'(x)=b+2c(x+1)+3d(x+1)^2 \qquad S_1''(x)=2c+6d(x+1)$$

Así

$$\begin{aligned}
S_1(-1)&=S_0(-1)\\
a&=-\frac{2}{3}(-1+3)^3-\frac{1}{2}(-1+3)^2+\frac{20}{3}(-1+3)-7\\
a&=-1\\
S_1'(-1)&=S_0'(-1)\\
b&=-2(-1+3)^2-(-1+3)+\frac{20}{3}\\
b&=-\frac{10}{3}\\
S_1''(-1)&=S_0''(-1)\\
2c&=-4(-1+3)-1\\
c&=-\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

por último

$$\begin{aligned} S_1''(1) &= 1 \\ 2\left(-\frac{9}{2}\right) + 6d(1+1) &= 1 \\ d &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

La tabla de interpolación para esta cercha es

x_k	-3	-1	1
$f(x_k)$	-7	-1	-19

3. Buscamos una cota *razonable* para $|E_3(x)|$, es decir, $|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{2(b-a)^4}{4^4(4)!} \max\limits_{a \leq x \leq b} \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| \right\}$ para $f(x) = \ln(5-x)$ con $x \in [1,3]$

$$f'(x) = -\frac{1}{5-x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(5-x)^2} \qquad f'''(x) = -\frac{2}{(5-x)^3} \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(5-x)^4}$$

$f^{(5)}(x) = -\dfrac{24}{(5-x)^5} < 0$ para $x \in [2,6]$, luego $f^{(4)}$ es funcion decreciente de valores negativos, esto es, $\left| f^{(4)}(x) \right|$ alcanza su valor máximo en $x = 3$, $\left| f^{(4)}(c) \right| \leq \dfrac{3}{8}$. Luego

$$|E_3(x)| \leq \frac{2(3-1)^4}{4^4(4)!} \max_{a \leq x \leq b} \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| \right\} \leq \frac{2(3-1)^4}{4^4(4)!} \frac{3}{8} = 0.001953125.$$

4. Tenemos 4 datos, luego el polinomio interpolante de Lagrange es de grado menor igual a 3

$$\begin{aligned} p_3(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) \\ p_3(x) &= L_0(x) + 2L_1(x) - 3L_2(x) - 8L_3(x) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-5)(x-8)(x-12)}{(2-5)(2-8)(2-12)} = -\frac{1}{180}(x-5)(x-8)(x-12) \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-2)(x-8)(x-12)}{(5-2)(5-8)(5-12)} = \frac{1}{63}(x-2)(x-8)(x-12) \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-2)(x-5)(x-12)}{(8-2)(8-5)(8-12)} = -\frac{1}{72}(x-2)(x-5)(x-12) \\ L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(12-2)(12-5)(12-8)} = \frac{1}{280}(x-2)(x-5)(x-8) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} p_3(x) = &-\frac{1}{180}(x-5)(x-8)(x-12) + \frac{2}{63}(x-2)(x-8)(x-12) \\ &+ \frac{1}{24}(x-2)(x-5)(x-12) - \frac{1}{35}(x-2)(x-5)(x-8) \end{aligned}$$

y $f(6) \approx p_3(6)$

$$\begin{aligned} p_3(6) &= -\frac{1}{180}(6-5)(6-8)(6-12) + \frac{2}{63}(6-2)(6-8)(6-12) \\ &+ \frac{1}{24}(6-2)(6-5)(6-12) - \frac{1}{35}(6-2)(6-5)(6-8) \\ &= \frac{24}{35}. \end{aligned}$$

5. **(i)** $p(x) = 729 - 665(x+2) + 301(x+2)(x+1) - 90(x+2)(x+1)x$

   (ii) $\alpha = \dfrac{11-31}{3-(-1)} = -5$

Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín, Escuela de Matemáticas
Métodos Numéricos (3006907), Supletorio - Segundo examen parcial
Semestre 02-2016, 31 de octubre de 2016,
Duración: 1 hora y 50 minutos

Calificación

1.	
2.	
3.	
4.	
Total	

Nombre completo:____

Carnet:____________________________ **Grupo:**_____________

La interpretación del examen hace parte de la evaluación, por tanto NO se admiten preguntas una vez comenzada la prueba.

Duración: 1 hora y 50 minutos.

1. (15%) Encuentre el ajuste para una curva de la forma $y = \dfrac{B}{A+x}$ para los siguientes conjuntos de datos, mediante la teoría de los mínimos cuadrados.

x_i	-1	0	1	2	5
y_i	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{3}$

2. (15%) Considere la siguiente tabla de diferencias divididas

x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$
$x_0 = -1$	γ		
$x_1 = 1$	α	-3	
$x_2 = 2.5$	4	β	4

Encuentre el valor de $\alpha = f(1)$.

3. (25%) Considere la función $S(x)$ definida por:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + a(x-1) + b(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 + c(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

a. (20%) Determine los valores de a, b, c y d que hacen que $S(x)$ sea un spline cúbico natural para el conjunto de puntos $(x, f(x))$ dado por $\{(1,1), (2,1), (3,0)\}$.

b. (5%) Obtenga el valor aproximado de $f(3/2)$

4. (25%) Considere la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0) + Bf(z)$$

i. (15%) Calcule los coeficientes A y B y el nodo z de tal manera que la fórmula sea exacta para todos los polinomios de grado tan alto como sea posible. Cuál es el grado de precisión de esta fórmula?

ii. (10%) Use la fórmula anterior para dar un valor aproximado de $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos x^2 dx$.

5. (20%) Las ***fórmulas de Newton-Cotes abiertas*** no incluyen los extremos del intervalo $[a, b]$. Éstas utilizan los nodos $x_j = a + (j+1)h$, para $j = -1, 0, \ldots, n, n+1$ donde $h = \dfrac{b-a}{n+2}$. Esto implica que los nodos interiores serán los x_i para $i = 0, \ldots, n$ y los extremos del intervalo son $x_{-1} = a$ y $x_{n+1} = b$.
La fórmula de Newton-Cotes abierta que se obtiene al tomar 2 subintervalos, es decir, al tomar $h = \dfrac{b-a}{2}$ se conoce como la *regla del punto medio simple* y esta dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx \approx 2hf(x_0)\,.$$

Deduzca la *regla del punto medio compuesta* que se obtiene al tomar $h = \dfrac{b-a}{n+2}$, nodos $x_j = a + (j+1)h$, $j = -1, 0, \ldots, n, n+1$, para n entero par mayor o igual a 2.

Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín, Escuela de Matemáticas
Métodos Numéricos (3006907), Segundo examen parcial
Semestre 01-2017, 17 de abril de 2017, TEMA A
Duración: 1 hora y 40 minutos

Calificación

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Total	

Nombre completo:____

Carnet:______________________________ **Grupo:**______________

La interpretación del examen hace parte de la evaluación, por tanto no se admiten preguntas comenzada la prueba. No está permitido el uso teléfonos móviles, los cuales deben permanecer apagados durante el tiempo de duración del examen.

TODA RESPUESTA DEBE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA

Duración: 1 hora y 40 minutos.

1. (20%) Determine (si existen) coeficientes a, b y c de tal forma que la función

$$S(x) = \begin{cases} 4 + ax - \dfrac{41}{5}x^2 + \dfrac{21}{5}x^3, & x \in [0,1) \\ 1 - \dfrac{14}{5}(x-1) + b(x-1)^2 - \dfrac{8}{5}(x-1)^3, & x \in [1,2] \\ 1 + c(x-2) - \dfrac{2}{5}(x-2)^2 + \dfrac{1}{5}(x-2)^3, & x \in (2,3] \end{cases}$$

sea un spline en el intervalo $[0,3]$. ¿ Es un spline cúbico natural?

$\boxed{2.}$ Considere la nube de puntos $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{4}$ asociada a una función f:

x_k	-2	-1	0	1	2
$y_k = f(x_k)$	-39	1	1	$\boldsymbol{\alpha}$	23

a. (7%) El polinomio de interpolación de Lagrange $P_4(x)$ para la nube de puntos tiene la forma:

$$P_4(x) = y_0\ \mathcal{L}_0(x) + y_1\ \mathcal{L}_1(x) + y_2\ \mathcal{L}_2(x) + y_3\ \mathcal{L}_3(x) + y_4\ \mathcal{L}_4(x).$$

El coeficiente polinómico de Lagrange $\mathcal{L}_3$ en **este** caso esta dado por:

$$\mathcal{L}_3(x) = \underline{\hspace{6cm}}$$

b. La tabla de diferencias divididas asociada a la nube de puntos esta dada por:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-3}, \ldots, x_k]$	$f[x_{k-4}, \ldots, x_k]$
-2	-39				
-1	1	40			
0	1	0	$\boldsymbol{\beta}$		
1	$\boldsymbol{\alpha}$	2	1	7	
2	23	20	9	$\frac{8}{3}$	$\boldsymbol{\gamma}$

i. (15%) Complete los valores de la tabla, es decir, halle los valores $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$.

ii. (8%) Halle el polinomio de interpolación de Newton para la función f en los nodos -1, 0, 1 y 2.

$\boxed{3.}$ Las ***fórmulas de Newton-Cotes abiertas*** no incluyen los extremos del intervalo $[a, b]$. Éstas utilizan los nodos $x_j = x_0 + (j+1)h$, para $j = 0, 1, \dots, n$ donde $h = \dfrac{b-a}{n+2}$. Esto implica que $x_0 = a + h$ y $x_n = b - h$, por lo cual se marcan los extremos haciendo $x_{-1} = a$ y $x_{n+1} = b$. Las formulas de Newton-Cotes abiertas tienen la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j).$$

La fórmula de Newton-Cotes abierta que se obtiene al tomar 3 subintervalos, es decir, al tomar $n = 1$, está dada por:

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{3h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right].$$

(15%) **Deduzca** la *fórmula de Newton-Cotes abierta <u>compuesta</u>* (para la fórmula anterior) que se obtiene al tomar $h = \dfrac{b-a}{n+2}$, para n entero de la forma $n = 3m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$).

$\boxed{4.}$ (20%) Calcule la siguiente integral impropia empleando la fórmula de cuadratura Gaussiana con 2 nodos.

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\infty} \frac{2}{\tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)} \, dy \ .$$

$\boxed{5.}$ Se desea encontrar la curva $y = \dfrac{1}{(Cx+D)^2}$ que mejor se ajusta según mínimos cuadrados, después de una linealización apropiada, a los siguientes datos:

x_k	-3	-1	0	2
y_k	14	5	4	2

a. (5%) Indique el cambio de varibles apropiado para obtener la ecuación linealizada de la forma $Y = AX + B$.

b. (10%) **Plantee** el sistema de ecuaciones normales a resolver para determinar A y B.

Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín, Escuela de Matemáticas
Métodos Numéricos (3006907), Segundo examen parcial
Semestre 02-2018, 4 de marzo de 2019, $\boxed{\textbf{TEMA A}}$
Duración: 1 hora y 40 minutos

Nombre completo:____

Carné:____________________________ **Grupo:**______________

Calificación

1.	
2.	
3.	
4.	
Total	

Instrucciones. No está permitido el uso de calculadora ni de cualquier otro tipo de aparato electrónico, incluyendo teléfonos móviles, los cuales deben permanecer apagados durante el tiempo de duración del examen. La interpretación del examen hace parte de la evaluación, por tanto **no** se admiten preguntas.

1. Las siguientes preguntas son de **selección múltiple con única respuesta** o de **completación**. En el primer caso, seleccione **solo** la respuesta que considere correcta y márquela de manera adecuada; en el segundo caso escriba la respuesta de manera legible.

   (a) (5%) Considere la tabla de datos

x_k	-1	1	2	3
$y_k = f(x_k)$	1	0	-2	-1

   Sabemos que el polinomio interpolante de Lagrange tiene la forma

$$P_3(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x),$$

   donde el polinomio básico de Lagrange L_2 está dado por:

   i. $L_2(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)}$.

   ii. $L_2(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-1)}{(-2-1)(-2-0)(-2+1)}$.

   iii. $L_2(x) = \dfrac{(x-1)(x-0)(x+1)}{(-2-1)(-2-0)(-2+1)}$.

   iv. $L_2(x) = \dfrac{(x-1)(x-0)(x+1)}{(2+1)(2-1)(2-3)}$.

   v. Ninguno de los anteriores.

   (b) (5%) Considere la fórmula de cuadratura

$$\int_0^4 f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{8}{3}f(2) + \frac{2}{3}f(4).$$

   El grado de precisión de esta fórmula es

   i. 1.
   ii. 2.
   iii. 3.
   iv. Ninguno de las anteriores.

   (c) (5%) Sabemos que las raíces del polinomio de Chebyshev de grado tres, en el intervalo $[-1,1]$, son $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = 0$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Si queremos hallar el polinomio interpolante de grado menor o igual que tres, para una función f, en el intervalo $[0,2]$, de manera que el error de interpolación sea el más pequeño posible, entonces los nodos en los que debemos interpolar son:

$$x_0 = \_\_\_\_\_\_\_\_,\ x_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \ \text{y}\ \ x_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

(d) (5%) Suponga que disponemos de un conjunto de datos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$, que queremos aproximar mediante una función de la forma $y = \dfrac{5}{Cx + D}$. Entonces, un posible cambio de variable para linealizar los datos es

$$X = \underline{\hspace{3cm}} \qquad Y = \underline{\hspace{3cm}}$$

2. Considere la función S definida por:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + ax + 2x^2 - 2x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(a) (20%) Determine, **si es posible**, los valores de a y b que hacen que S sea un spline cúbico sujeto, para una cierta función f.

(b) (5%) Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$, en caso que existan. De lo contrario diga por qué no existen.

3. (a) (15%) Considere la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0) + Bf(z).$$

Calcule los coeficientes A y B y el nodo z de tal manera que la fórmula sea exacta para todos los polinomios de grado tan alto como sea posible. ¿Cuál es el grado de precisión de esta fórmula?

(b) (15%) Use la fórmula de cuadratura gaussiana de dos puntos para encontrar una expresión que permita aproximar el valor de

$$\int_1^\infty \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{x(x+2)}dx.$$

Nota: No evalúe la expresión. Solo deje indicados los puntos donde se debe evaluar la función e indique la función que se está evaluando.

4. Considere la nube de puntos $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{4}$ asociada a una función f:

x_k	-2	-1	1	3	4
$y_k = f(x_k)$	-8	2	-2	$\boldsymbol{\alpha}$	-2

Si la tabla de diferencias divididas asociada a la nube de puntos está dada por:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-3}, \ldots, x_k]$	$f[x_{k-4}, \ldots, x_k]$
-2	-8				
-1	2	10			
1	-2	-2	-4		
3	$\boldsymbol{\alpha}$	6	$\boldsymbol{\beta}$	$\frac{6}{5}$	
4	-2	-12	-6	$-\frac{8}{5}$	$\boldsymbol{\gamma}$

(a) (15%) Complete los valores de la tabla, es decir, halle los valores $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$.

(b) (10%) Halle el polinomio de interpolación de Newton para la función f en los nodos -1, 1, 3 y 4.

Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias - Escuela de Matemáticas
Lunes 22 de julio de 2019, Segundo Parcial Teórico de Métodos Numéricos (3006907)
Duración: 1 hora y 50 minutos – Tema A

1.	2.	3.	4.	5.	Total

Nombre: ____

Nota

N^o Carné: ____________________ Grupo: ________

La interpretación del examen hace parte de la evaluación, por tanto no se admiten preguntas comenzada la prueba.

$\boxed{1.}$ (20%) Consideremos dos funciones infinitamente diferenciables, f definida en $[-3,3]$ y g definida en $[-1,1]$. Completar:

a. Si aplicamos la regla de trapecio compuesta con 9 subintervalos para aproximar el valor de $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$, el error que se obtiene es $\mathcal{O}\left(\_\_\_\_\right)$.

b. El grado de precisión o exactitud al aplicar cuadratura Gaussiana con 6 nodos es ______.

c. Si f es una función impar (esto es, $f(-x) = -f(x)$) y empleamos la regla de Simpson compuesta con 4 subintervalos entonces

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx \approx \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

d. Si denotamos por Q el polinomio de grado menor igual a 5 que mejor aproxima a la función g en el intervalo $[-1,1]$ y sabemos que $\max\limits_{-1\le x\le 1} |g^{(4)}(x)| \le 8.2$, $\max\limits_{-1\le x\le 1} |g^{(5)}(x)| \le 3.4$ y $\max\limits_{-1\le x\le 1} |g^{(6)}(x)| \le 1.75$, entonces la cota para el error que se comete al aproximar la función g por medio del polinomio Q en $[-1,1]$ es ____________________.

En adelante: trabajar con redondeo a dos dígitos decimales. Recuerde: respuestas sin procedimiento no se califican.

$\boxed{2.}$ Mediante la teoría de los mínimos cuadrados, queremos hallar la curva de ajuste de la forma $y = Ce^{Dx}$ para la nube de puntos

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{4} = \{(-2, 3.1), (1, 4.5), (3, 5.78), (6, 11.3)\}\ .$$

a. (7%) Indique el cambio de variables apropiado para obtener la ecuación linealizada de la forma $Y = AX + B$.

b. (8%) Plantee el sistema de ecuaciones normales a resolver para determinar A y B.

$\boxed{3.}$ Consideremos la función $g(x) = \dfrac{100\ \tan^{-1}(5x)}{8x^2+3}$ y el intervalo $I := [-4, 2]$.

a. (12%) Halle el polinomio que interpola a g en I en los nodos $x_0 = -4$, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

b. (6%) ¿Cuál es el error relativo cometido al aproximar $g(1.3)$ por medio del polinomio interpolante hallado en a.?

c. (4%) Halle el coeficiente polinómico de Lagrange $L_2(x)$.

d. (8%) Halle los nodos necesarios para construir el polinomio de grado menor igual a 3 que mejor aproxima a la función g en el intervalo I.

$\boxed{4.}$ Considere la siguiente fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af\left(-\frac{1}{2}\right) + Bf(0) + Cf\left(\frac{1}{2}\right) .$$

a. (12%) Determine los valores de A, B y C que hagan que la fórmula de cuadratura sea exacta para todos los polinomios de grado tan alto como sea posible. ¿Cuál es el grado máximo de exactitud?

b. (10%) Emplear esta fórmula de cuadratura para aproximar la integral $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt{1-\frac{1}{x}}\, dx$

$\boxed{5.}$ Consideremos la siguiente nube de puntos

x_k	-3	0	1	3	7
y_k	-4	-3	0	2	10

Queremos hallar el spline cúbico que pasa por los puntos y para ello debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones (de acuerdo con lo visto en clase y el texto guía)

$$\begin{aligned} 3c_0 + 8c_1 + c_2 &= 8\ , \\ c_1 + 6c_2 + 2c_3 &= -6\ , \\ 2c_2 + 12c_3 + 4c_4 &= 3\ . \end{aligned}$$

Recuerde que $b_j = \dfrac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \dfrac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$ y $d_j = \dfrac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$.

a. (4%) ¿Cuál es el sistema de ecuaciones (cuadrado) que se debe resolver si queremos hallar el spline cúbico con terminación parabólica?

b. (9%) ¿Cuál es el sistema de ecuaciones (cuadrado) que se debe resolver si queremos hallar el spline cúbico extrapolado?

★ (10% – Extra) Si S es el spline cúbico natural para nube de puntos dada, halle $S(x)$ para $x \in [0,1]$ teniendo en cuenta que $S''(1) = -2.71$.