Universidad de Antioquia Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Cursos de Servicios para Ingeniería	
Tiempo para la realización de la prueba: 2 Horas	Calificación
Nombre:	Documento:
Parcial 1 Cálculo Integral Valor:20 %	
Profesor: Juan Fernando Valencia Grupo:	Fecha:

ES OBLIGATORIO DILIGENCIAR TODOS LOS CAMPOS DEL ENCABEZADO DEL EXAMEN

La interpretación del exámen hace parte de la evaluación, por tal motivo no se responden preguntas durante la realización de la prueba. Se permite el uso de calculadora no programable. El uso de cualquier otro dispositivo electrónico como celulares, tablets, smartwatch, etc, además de notas de clase, tablas de fórmulas, apuntes, libros, etc; implicará la anulación de la prueba. **Los procedimientos empleados para hallar las respuestas a los ejercicios deben quedar registrados en esta hoja, ordenados y legibles para el profesor. NO SE ACEPTAN HOJAS ADICIONALES**. Respuestas sin justificación o no legibles se califican con cero.

LEA CUIDADOSAMENTE CADA UNO DE LOS ENUNCIADOS

1. (14 puntos) Resuelva las siguientes integrales:

a) (7 puntos) $\int \frac{2e^x-8}{e^x+e^{-x}}dx$

Justificación:

$$\int \frac{2e^x-8}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{2u-8}{u+\frac{1}{u}}\frac{1}{u}du = \int \frac{2u-8}{u^2+1}du = \int \frac{2u}{u^2+1}du - 8\int \frac{1}{u^2+1}du$$

$u=e^x \Rightarrow x=\ln(u)$

$dx=\frac{1}{u}du$

$$= \int \frac{1}{v}dv - 8\tan^{-1}(u)$$

$v=u^2+1$

$dv=2u\,du$

$$= \ln|v| - 8\tan^{-1}(u)+C$$

$$= \ln(u^2+1) - 8\tan^{-1}(u)+C$$

$$= \ln(e^{2x}+1) - 8\tan^{-1}(e^x)+C$$

b) (7 puntos) $\int e^{2x}\tan^{-1}(e^x)dx$.

Justificación:

$$\int e^{2x}\tan^{-1}(e^x)dx = \int y\tan^{-1}(y)\,dy = \frac{y^2}{2}\tan^{-1}(y) - \int \frac{y^2/2}{y^2+1}dy$$

$y=e^x$

$dy=e^x dy$

$u=\tan^{-1}(y)$ $\quad v=\frac{y^2}{2}$

$du=\frac{1}{y^2+1}dy$ $\quad dv=y\,dy$

$$= \frac{y^2\tan^{-1}(y)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{y^2+1-1}{y^2+1}dy$$

$$= \frac{y^2\tan^{-1}(y)}{2} - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{y^2+1}\right)dy$$

$$= \frac{y^2\tan^{-1}(y)}{2} - \frac{1}{2}\left(y-\tan^{-1}(y)\right)+C$$

2. (15 puntos)Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique cada respuesta

a) (F)(4 puntos) Si $\int f(x)dx = F(x)+C$ y $\int g(x)dx = G(x)+C$ entonces $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) + G(x)f(x) + C$ Justificación:

$$\frac{d}{dx}(F(x)g(x) + G(x)f(x)) = f(x)g(x) + F(x)g'(x) + g(x)f(x) + G(x)f'(x)$$

$$= F(x)g'(x) + G(x)f'(x) + 2f(x)g(x)$$

$$\neq f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \int f(x)g(x)dx \neq F(x)g(x) + G(x)f(x) + C$$

b) (V)(4 puntos) Si $\int f(x)dx = e^{x^2} + C$ y entonces $\int x^2 f(x)dx = x^2e^{x^2} - e^{x^2} + C$. Justificación:

$$\int x^2 f(x)dx = x^2e^{x^2} - \int 2x\, e^{x^2}dx = x^2e^{x^2} - \int e^y\, dy = x^2e^{x^2} - e^y + C$$

$$= x^2e^{x^2} - e^{x^2} + C$$

$u = x^2$ $\quad v = e^{x^2}$ $\quad y = x^2$

$du = 2x\,dx$ $\quad dv = f(x)dx$ $\quad dy = 2x\,dx$

3. Seleccione la respuesta correcta. No es necesario justificar su respuesta.

a) ( )(3 puntos) La única sustitución valida para aplicar en la integral

$$\int \frac{x^3 + x\sqrt{x^2-1}}{x^2+3}dx$$

es:

i) $u = x^2$ iii) $u = \sqrt{x^2-1}$

ii) $u = x^3$ iv) $u = \frac{x}{x^2+3}$

b) ( )(3 puntos) La única sustitución valida para aplicar en la integral

$$\int \frac{e^{3x} + e^x(\cos(e^{2x}) + 2)^3}{\sin^2(e^x) - 1}dx$$

es:

i) $u = \sin(e^x)$ iii) $u = e^x$

ii) $u = \cos(e^{2x})$ iv) Ninguna de las anteriores.

4. (7 Puntos) Encuentre

$$\int \tan^3(x)\sec^5(x)dx$$

Justificación:

$$\int \tan^3(x)\sec^5(x)\,dx = \int \tan^2(x)\sec^4(x)\sec(x)\tan(x)\,dx$$

$$= \int (\sec^2(x)-1)\sec^4(x)\sec(x)\tan(x)\,dx$$

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\,dx$

$$= \int (u^2-1)u^4\,du$$

$$= \int (u^6-u^4)\,du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{\sec^7(x)}{7} - \frac{\sec^5(x)}{5} + C$$

5. (7 puntos) Cálcule

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx$$

Justificación:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \int \frac{u}{u^2+3u+2}\,du = \int \frac{u}{(u+2)(u+1)}\,du$$

$u = e^x$

$du = e^x dx$

$$= \int \left(\frac{2}{u+2} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= 2\ln|u+2| - \ln|u+1| + C$$

$$= 2\ln(e^x+2) - \ln(e^x+1) + C$$

$$\frac{u}{(u+2)(u+1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1} = \frac{2}{u+2} - \frac{1}{u+1}$$

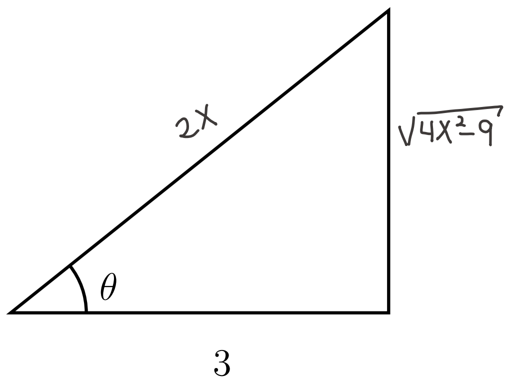
$$\left.\frac{u}{(u+2)(u+1)}\right|_{u=-2} = \frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow A = 2$$

$$\left.\frac{u}{(u+2)(u+1)}\right|_{u=-1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow B = -1$$

6. (9 puntos) Use el triángulo abajo para realizar una adecuada sustitución trigonométrica y resolver la integral

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^3}dx$$

Justificación:



$\cos(\theta) = \frac{3}{2x}$ $\frac{1}{x} = \frac{2\cos\theta}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4\cos^2\theta}{9}$	$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{4x^2-9}}{2x}$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x} = 2\operatorname{sen}\theta$
$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}$	$\sec(\theta) = \frac{2x}{3}$ $\theta = \sec^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$
$x = \frac{3\sec\theta}{2}$	$dx = \frac{3\sec\theta\tan\theta}{2}d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,\frac{1}{x^2}\,dx = \int 2\operatorname{sen}\theta\,\frac{4\cos^2\theta}{9}\,\frac{3\sec\theta\tan\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int \operatorname{sen}\theta\,\cancel{\cos^2\theta}\,\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cancel{\cos\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + C$$

$$= \frac{4}{3}\sec^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{4}{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C$$

$$= \frac{4}{3}\sec^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{4x^2-9}}{2x}\,\frac{3}{2x} + C$$

$$= \frac{4\sec^{-1}(2x/3)}{3} - \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^2} + C$$