Notas de Clase
Geometría Vectorial y Analítica

Diego Mejía (Coordinador del curso)

Profesor Escuela de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Índice general

Capítulo 1

Vectores y rectas en el plano cartesiano

1.1. La recta numérica

Comencemos el estudio de la geometría analítica recordando la imagen geométrica (o visual) del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Dibujemos una línea recta y en ella escojamos un punto cualquiera que llamamos *origen* denotado por la letra O (o mayúscula). Al origen le asignamos el número real 0. A continuación seleccionamos (arbitrariamente) una *unidad de medida* y dibujamos sobre la recta el punto U correspondiente a la unidad de medida. Al punto U (que es distinto del origen) le asignamos el número real 1.

El punto U nos proporciona una orientación de la recta en el siguiente sentido: llamamos *lado positivo* de la recta al *rayo* que sale del origen en la dirección del punto U, y *lado negativo* al rayo que sale del origen en dirección contraria al punto U.

En seguida establecemos una *correspondencia biunívoca* (es decir, correspondencia uno a uno) entre los números reales y los puntos sobre la recta: si P es un punto situado del lado positivo de la recta que dista p unidades del origen entonces le asignamos el número real p, y si está situado del lado negativo le asignamos el número real $-p$. Así, los números reales positivos corresponden a los puntos situados del lado positivo de la recta, y los negativos a los puntos situados del otro lado de la recta. Esta imagen visual de los números reales es lo que llamamos *recta numérica* o *recta real* o, inclusive, *eje coordenado*.

La identificación anterior nos permite denotar un punto A sobre la recta teniendo en cuenta el número real a que le corresponde, el cual llamamos la *coordenada* del punto, y escribimos $A = (a)$ (ver Figura 1).

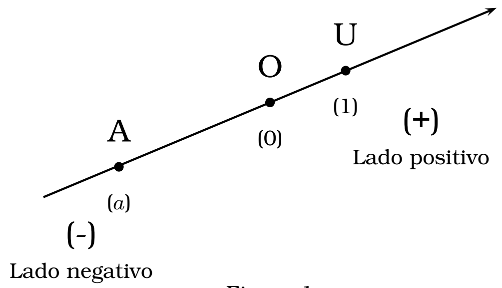

Figura 1

Quizá la primera inquietud que surge de forma natural es cómo expresar la distancia entre dos puntos $A = (a)$ y $B = (b)$ de la recta numérica con base en sus coordenadas. Supongamos inicialmente el caso particular en el que el punto B es el origen $O = (0)$. Nuestro modelo visual nos dice que si el punto A está del lado positivo de la recta entonces la distancia entre ambos puntos debe ser a unidades, mientras que si A está del lado negativo la distancia entre ambos puntos es $-a$ unidades. En otras palabras, nuestro modelo visual nos dice que la distancia entre el punto $A = (a)$ y el origen $O = (0)$ es el valor absoluto de la coordenada a del punto A.

Supongamos ahora que el punto B no es el origen y que tanto A como B se encuentran del lado positivo de la recta. Si el punto A está a la "derecha"del punto B, es decir, si $a > b$, estaremos de acuerdo en que la distancia entre ambos puntos es igual a la distancia entre el origen y el punto A menos la distancia entre el origen y el punto B, esto es: $a - b$ unidades; y si B está a la "derecha"de A entonces esta distancia es $b - a$ unidades. Ambas situaciones se resumen diciendo que la distancia entre A y B es $|a - b|$ unidades.

En seguida suponemos que el punto A está del lado positivo de la recta mientras que el punto B está del lado negativo; es decir, $a > 0$ y $b < 0$ (ver Figura 2). En este caso estaremos de acuerdo en que la distancia entre ambos puntos es igual a la distancia entre el punto A y el origen más la distancia entre el punto B y el origen, es decir, dicha distancia es igual a $a + (-b) = a - b$ unidades. Si la situación fuera al contrario, con el punto B del lado positivo y el punto A del lado negativo, entonces llegamos a que la distancia entre ambos puntos es $b - a$ unidades. Luego, cualquiera que sea el caso, la distancia entre los puntos A y B es $|a - b|$ unidades.

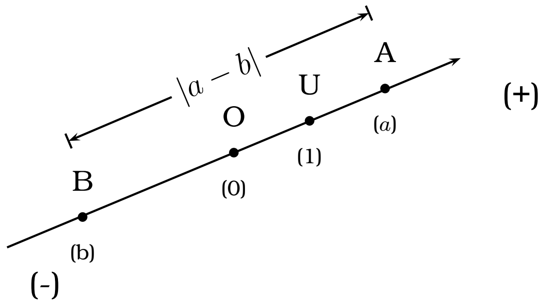

Figura 2

Sólo falta por considerar la situación en que ambos puntos están del lado negativo de la recta. El lector puede convencerse que, al igual que en los casos anteriores, nuestro modelo visual nos conduce a que la distancia entre los puntos A y B es $|a - b|$ unidades.

Ejercicio 1.1. Sean $A = (a)$ y $B = (b)$ dos puntos de la recta real con $a < 0$ y $b < 0$. Use un argumento visual para verificar que la distancia entre A y B es $|a - b|$.

La discusión anterior nos lleva de manera natural a la siguiente definición:

Definición 1.1. Sean $A = (a)$ y $B = (b)$ dos puntos de la recta real. Definimos la *distancia* entre A y B, denotada por $\text{dist}(A, B)$, como sigue:

$$\text{dist}(A, B) = |a - b|. \tag{1.1}$$

Puesto que $|a - b| = |b - a|$, vemos que $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A)$.

Ejemplo 1.1. A manera de ejemplo, sean $A = (-5)$ y $B = (7)$ dos puntos de la recta numérica. La distancia entre ambos puntos es

$$\text{dist}(A, B) = |-5 - 7| = |-12| = 12.$$

Ejercicio 1.2. Sean $A = (a)$ y $B = (b)$ dos puntos de la recta numérica y sea $M = (m)$ el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Pruebe que $m = \frac{a+b}{2}$. ¿Cuál es la coordenada del punto medio del segmento $\overline{AB}$ del ejemplo anterior?

1.2. El plano cartesiano

El plano cartesiano se fundamenta en el concepto de par ordenado de números reales. Un *par ordenado* es una pareja de números reales a y b en la cual uno de los números, digamos a, se distingue como el primero mientras que el otro, b, es el segundo, y lo escribimos en la forma $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales se denota por $\mathbb{R}^2$, es decir:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Visualicemos $\mathbb{R}^2$ dibujando en una superficie plana dos ejes coordenados perpendiculares, ambos con la misma unidad de medida y con el punto de intersección como origen común. Uno de los ejes lo trazamos horizontalmente y el otro, entonces, verticalmente. Al eje horizontal lo llamaremos eje x y lo orientamos positivamente hacia la derecha. Al eje vertical lo llamamos eje y y lo orientamos positivamente hacia arriba. Los ejes dividen la superficie plana en cuatro regiones llamados *cuadrantes* que se numeran de uno a cuatro en sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido antihorario) (ver Figura 3).

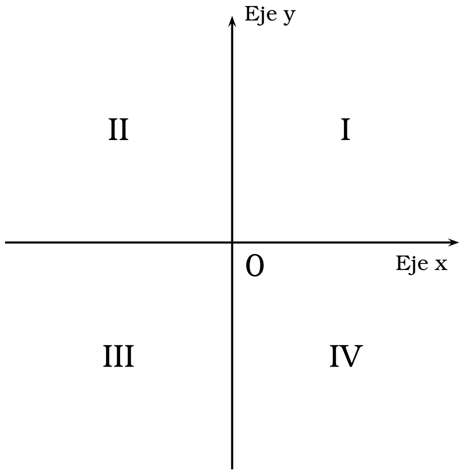

Figura 3

A cada punto P del eje x le asignamos el par ordenado $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donde x es la coordenada del punto P en el eje x, y escribimos $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$; si el punto P está sobre el eje y le asignamos el par ordenado $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, donde y es la coordenada del punto P en el eje y, y escribimos $P = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Si el punto P no está sobre los ejes trazamos desde P dos rectas: una perpendicular al eje x que corta a este eje en el punto $P' = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ y otra perpendicular al eje y que lo corta en el punto $P'' = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Entonces, asignamos al punto P el par ordenado $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y escribimos: $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ver Figura 4).

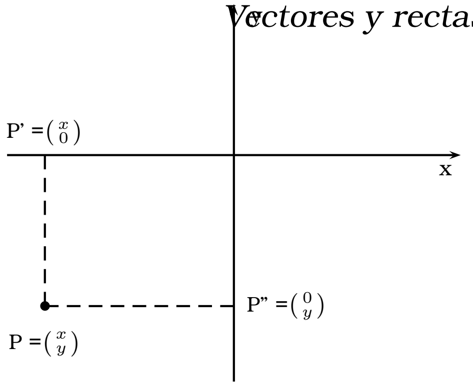

Figura 4

Recíprocamente, el lector puede verificar que cada par ordenado $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ determina un único punto sobre la superficie plana .

Hemos establecido así una correspondencia biunívoca entre las parejas de números reales y los puntos de la superficie plana. Las coordenadas x y y se llaman *coordenadas cartesianas* o *rectangulares* del punto P; además, llamamos *plano cartesiano* o, más sencillamente, *plano*, a $\mathbb{R}^2$ con el sistema de coordenadas rectangulares; los elementos del plano cartesiano los llamamos *puntos* o *vectores*; cuando empleamos la palabra *vector* para designar un punto del plano cartesiano usualamente lo dibujamos con una flecha desde el origen hasta el punto (ver Figura 5).

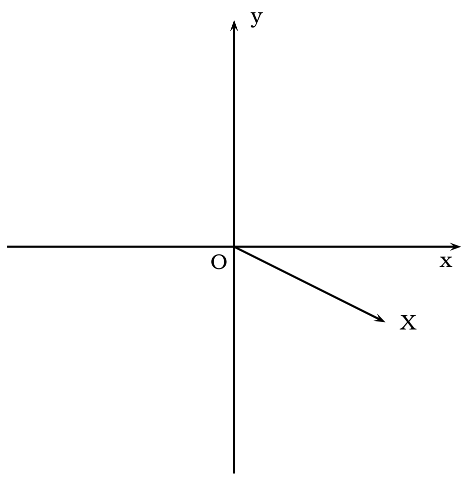

Figura 5

Al origen $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lo llamamos también *vector nulo* o *vector cero*.

Ejemplo 1.2. La Figura 6 ilustra la ubicación en el plano cartesiano de los puntos $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

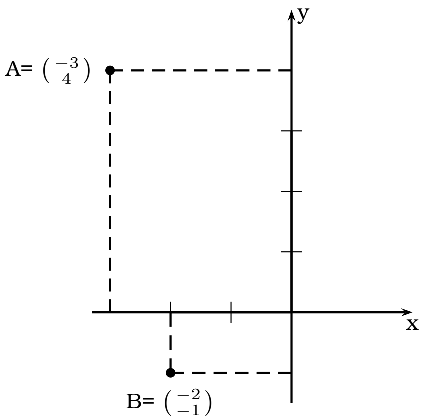

Figura 6

1.3. Suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar

Comenzamos el estudio de las operaciones básicas de los vectores del plano con la suma y la multiplicación por escalar.

Definición 1.2. Sean $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ vectores del plano y sea r un número real al cual llamaremos *escalar*. Definimos la *suma* , $X + U$, y la *multiplicación por escalar*, rX, por:

$$X + U = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix}, \qquad rX = X = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

A continuación enunciamos las propiedades de estas operaciones las cuales son consecuencia de la aritmética de los números reales.

Sean X, Y y Z vectores cualesquiera del plano y r y s números reales arbitrarios; tenemos:

P1 (Propiedad conmutativa para suma de vectores): $X + Y = Y + X$.

P2 (Propiedad asociativa para suma de vectores): $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$.

P3 (Existencia de neutro aditivo): $X+O = X = O+X$.

P4 (Existencia de inverso aditivo) : Existe un vector W tal que $W+X = X+W = O$.

P5 (Propiedad distributiva para vectores): $r(X+Y) = rX+rY$.

P6 (Propiedad distributiva para escalares): $(r+s)X = rX+sX$.

P7 (Propiedad asociativa para escalares): $r(sX) = (rs)X$.

P8: $1X = X$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces el vector W de la propiedad **P4** es $W = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ y lo llamamos el (vector) *opuesto* o *inverso aditivo* de X y lo denotamos por $-X$ (ver Figura 7). Notemos también que $-X = (-1)X$. Invitamos al lector a que verifique las propiedades anteriores suponiendo conocidas las propiedades de los números reales.

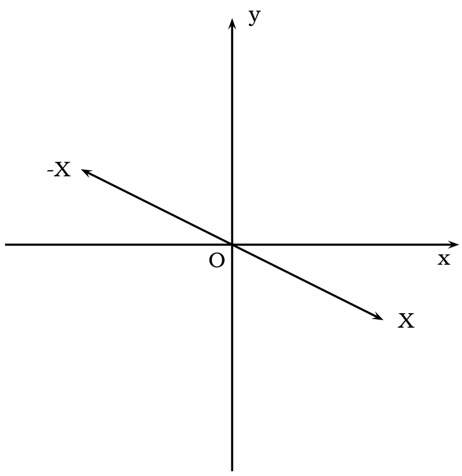

Figura 7

Ejercicio 1.3. Use la aritmética de los números reales para probar las propiedades anteriores.

Es útil y conveniente tener una interpretación geométrica (o visual) de la suma y multiplicación por escalar.

Definición 1.3. Supongamos que $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es un vector no nulo, el conjunto

$$\{X \in \mathbb{R}^2 : X = rU, r \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} ru \\ rv \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}$$

se llama la *recta generada* por el vector U.

Los puntos de la recta generada por el vector U son los *múltiplos escalares* de U. Si $r > 0$ obtenemos el *rayo* o *semirrecta* que sale de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y pasa por $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, y si $r < 0$ obtenemos el rayo opuesto (ver Figura 8).

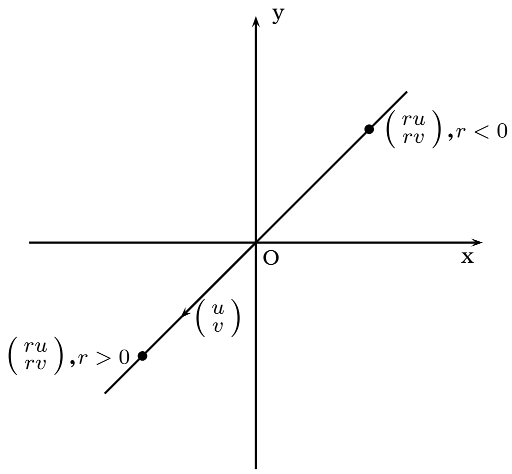

Figura 8

Notemos que cualquier múltiplo escalar no nulo de U genera la misma recta.

Ejemplo 1.3. La Figura 9 es el dibujo de la recta generada por $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, pero esta recta también es generada por el vector $(-1/2)U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, en otras palabras:

$$\left\{ X = r \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ X = s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Usamos letras diferentes, r y s, en la igualdad anterior, para enfatizar que un mismo vector no nulo es tanto un múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ como de $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, pero los escalares son distintos. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y también

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = (-4) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

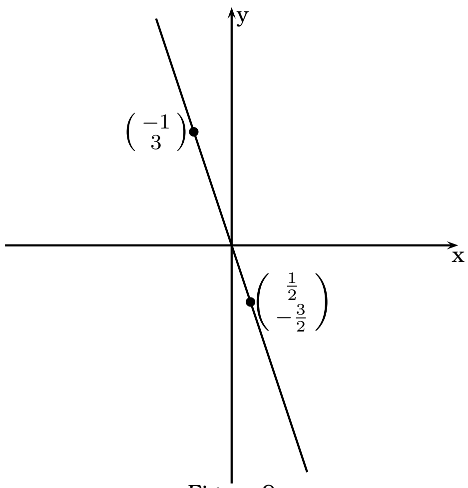

Figura 9

Definición 1.4. Si un vector U es múltiplo escalar de otro vector X, es decir, si $U = rX$, para algún escalar r, decimos que los vectores U y X son *linealmente dependientes*. Cuando dos vectores no son linealmente dependientes decimos que son *linealmente independientes*.

Ejemplo 1.4. Por ejemplo, los vectores $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes pues $B = (-2)A$.

Ejemplo 1.5. Notemos que, cualquiera sea el vector X, los vectores O y X son linealmete dependientes porque $O = 0X$.

Observación 1.1. Geométricamente, la dependencia lineal significa que los dos vectores yacen en una misma recta que pasa por el origen. Observemos además que si $U = rX$ con $r \neq 0$, entonces $X = (1/r)U$.

La dependencia lineal de vectores se puede caracterizar en términos de las coordenadas:

Teorema 1.1. Sean $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ vectores del plano. A y B son linealmente dependientes si y sólo si $ad - bc = 0$.

Prueba. Supongamos inicialmente que A y B son linealmente dependientes. Entonces existe un escalar t tal que $A = tB$; luego

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$a = tc \quad \text{y} \quad b = td;$$

al multiplicar la primera de estas ecuaciones por d y la segunda por c obtenemos

$$ad = tcd \quad \text{y} \quad bc = tdc,$$

y por lo tanto $ad - bc = tcd - tdc = 0$.

Ahora supongamos que $ad - bc = 0$ y probemos que A y B son linealmente dependientes. Observemos que si $a = d = 0$ entonces de la condición $ad - bc = 0$ se sigue que $bc = 0$; luego o $b = 0$ o $c = 0$; en otras palabras, o $A = O$ o $B = O$, y por lo tanto A y B son linealmente dependientes. Enseguida suponemos que o $a \neq 0$ o $d \neq 0$ y tratemos el caso $a \neq 0$ pues el otro es muy similar. De la condición $ad - bc = 0$ se sigue que

$$d = \frac{bc}{a},$$

y por lo tanto

$$B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = \frac{c}{a} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{c}{a}A,$$

luego B es múltiplo escalar de A y por consiguiente A y B son linealmente dependientes.$\square$

Ejercicio 1.4. Termine la prueba del teorema anterior probando que si $ad - bc = 0$ y $d \neq 0$ entonces $A = \frac{b}{d}B$.

Los vectores $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son particularmente importantes. Son linealmente independientes (afirmación que debe probar el lector) y todo vector del eje x puede escribirse en la forma: $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, así como todo vector del eje y puede escribirse en la forma: $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir, los vectores E_1 y E_2 generan los ejes x y y, respectivamente. Puesto que

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xE_1 + yE_2, \tag{1.3}$$

podemos expresar todo vector del plano como la suma de un vector del eje x y un vector del eje y.

Ejemplo 1.6. Por ejemplo,

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)E_1 + 3E_2.$$

Cuando escribimos un vector como lo acabamos de hacer decimos que lo hemos expresado como una *combinación lineal* de los vectores E_1 y E_2. Sobre el tema de combinaciones lineales volveremos un poco más adelante. Por el momento agregamos que, debido a lo anterior, la pareja de vectores $\{E_1, E_2\}$

es llamada *base canónica* o *estándar* de $\mathbb{R}^2$, y a la expresión (1.3) la llamamos *descomposición canónica* del vector X.

La descomposición canónica permite ilustrar el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ como el cuarto vértice de un rectángulo cuyos otros tres vértices son $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ (ver Figura 4).

De manera más general podemos obtener una interpretación geométrica de la suma de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}$ como sigue. Para simplificar supongamos que las coordenadas de los vectores son todas positivas. Comencemos con el triángulo con vértices $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; lo trasladamos paralelamente a él mismo de tal manera que su primer vértice se mueve a lo largo del segmento dirigido desde el origen al punto $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ hasta que coincida con este último punto; entonces los otros dos vértices del triángulo coincidirán con $\begin{pmatrix} u+x \\ v \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} u+x \\ v+y \end{pmatrix}$, respectivamente (ver Figura 10). Luego, la suma de los vectores $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ puede obtenerse gráficamente trasladando el segmento dirigido desde O a X, paralelamente a él mismo de tal manera que su punto inicial se mueve sobre el segmento dirigido desde O a U hasta que quede superpuesto sobre el punto U. El nuevo punto final del segmento dirigido representa al vector $U+X$, y éste será el cuarto vértice de un paralelogramo cuyos otros tres vértices son U, O y X.

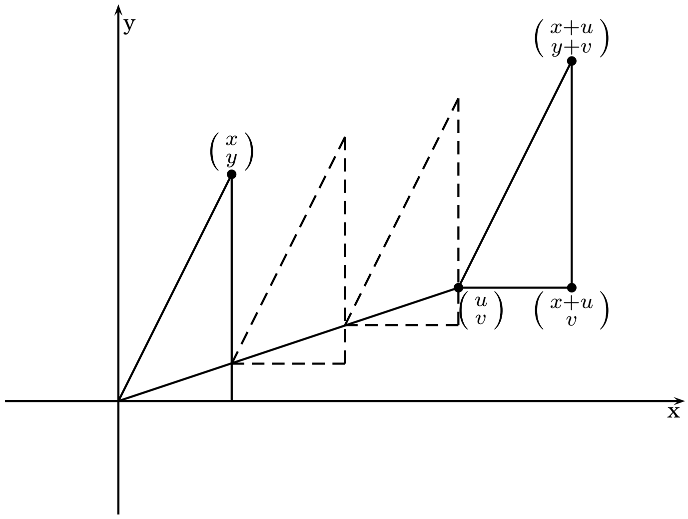

Figura 10

El procedimiento descrito de sumar vectores gráficamente se conoce como *regla del paralelogramo* o, también, *regla del triángulo*, y es aún válido si una o ambas coordenadas de los vectores son negativas o cero. Invitamos al lector a que verifique la regla del paralelogramo en otros casos.

Aunque las pruebas de las propiedades de la suma y la multiplicación por escalar son consecuencia de propiedades conocidas sobre la aritmética de los números reales, es instructivo que el lector verifique por su cuenta tales propiedades apelando a la interpretación geométrica de las operaciones.

Ejercicio 1.5. Verifique las propiedades de la suma y multiplicación por escalar utilizando el procedimiento gráfico.

Es posible que el procedimiento gráfico produzca un segmento de recta si sumamos dos múltiplos escalares de un mismo vector; inclusive, puede resultar en el origen cuando sumamos un vector con su inverso aditivo.

Ejemplo 1.7. La Figura 11 muestra diferentes situaciones para los vectores $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

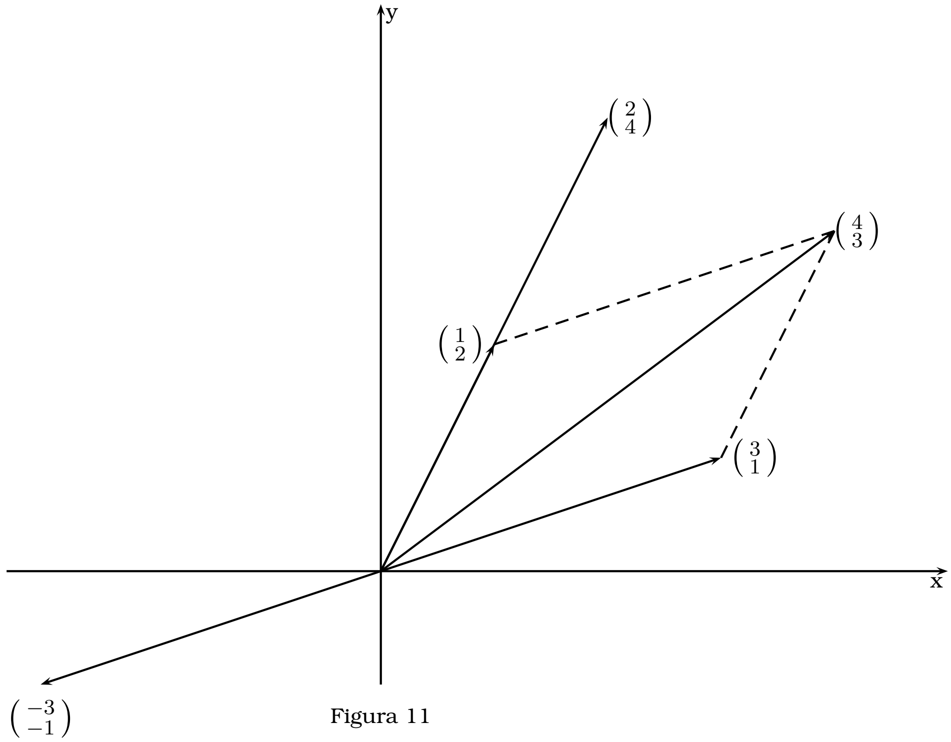

Figura 11

El inverso aditivo de un vector puede usarse para definir la noción de diferencia entre dos vectores (ver Figura 12).

Definición 1.5. Sean X y U vectores del plano. Definimos la *diferencia* $X - U$ por:

$$X - U = X + (-U).$$

Usando coordenadas,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = X - U = X + (-U) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix}.$$

Puesto que $(X - U) + U = X + ((-U) + U) = X + O = X$, vemos que $X - U$ es el vector que sumado a U nos da el vector X. Luego, si movemos $X - U$

paralelamente a él mismo hasta que su punto inicial se superponga sobre U, obtenemos el segmento de recta dirigido desde U hasta X.

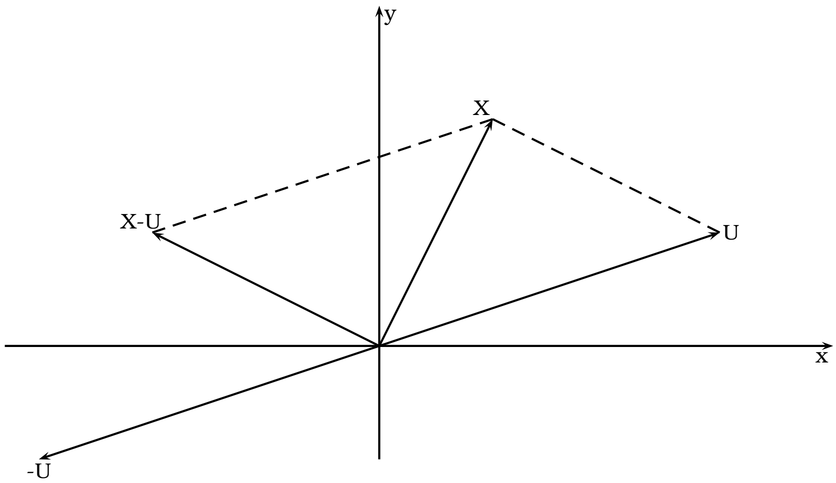

Figura 12

La diferencia de vectores no es una operación conmutativa:

Ejemplo 1.8. por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ entonces

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

De hecho $U - X$ es el opuesto de $X - U$ pues el uso apropiado de las propiedades de la suma y multiplicación por escalar justifican las igualdades $U - X = (-1)(-U) + (-1)X = (-1)((-U) + X) = (-1)(X + (-U)) = -(X - U)$.

Finalizamos esta sección retomando los conceptos de dependencia e independencia lineal. La afirmación fundamental es la siguiente:

Teorema 1.2. Todo vector del plano puede escribirse (o descomponerse), de manera única, como una combinación lineal de dos vectores linealmente independientes.

"Prueba". Preferimos explicar esta afirmación mediante un procedimiento gráfico que ilustramos en la Figura 13 (una prueba rigurosa, que emplea las coordenadas de los vectores, la dejamos como un ejercicio al lector). Supongamos que los vectores X y U son linealmente independientes y sean $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ y $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, respectivamente, las rectas generadas por ellos; sea Y cualquier otro vector del plano. Si Y está en la recta generada por X entonces $Y = rX + 0U$ para algún escalar r. Similarmente, si Y está en la recta generada por U entonces $Y = 0X + sU$ para algún escalar s. Si Y no pertenece a ninguna de dichas rectas entonces procedemos como sigue. Por el punto Y trazamos dos rectas: $\mathcal{L}'_{\mathcal{U}}$, paralela a la recta $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, y $\mathcal{L}'_{\mathcal{X}}$, paralela a la recta $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$. La recta $\mathcal{L}'_{\mathcal{U}}$ corta la recta $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ en el punto W; la recta $\mathcal{L}'_{\mathcal{X}}$, por su parte, corta la recta $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ en el punto Z. Por lo tanto los vectores W y Z son múltiplos escalares de X y U respectivamente; es decir, existen escalares, r y s tales que $W = rX$ y $Z = sU$. Además, por la regla del paralelogramo, $Y = W + Z = rX + sU$.

La unicidad de la que se habla en la afirmación radica precisamente en que los vectores X y U son linealmente independientes: si $Y = rX + sU$ y también $Y = r'X + s'U$ entonces $rX + sU = r'X + s'U$; luego, $(r - r')X = (s' - s)Y$. Si tuviéramos $r \neq r'$ entonces $X = \frac{s'-s}{r-r'}U$, con lo cual X y U serían linealmente dependientes. Por consiguiente $r = r'$. El mismo tipo de razonamiento nos permite concluir que $s = s'$, y entonces hay unicidad en la escritura de Y como combinación lineal de X y U. $\square$

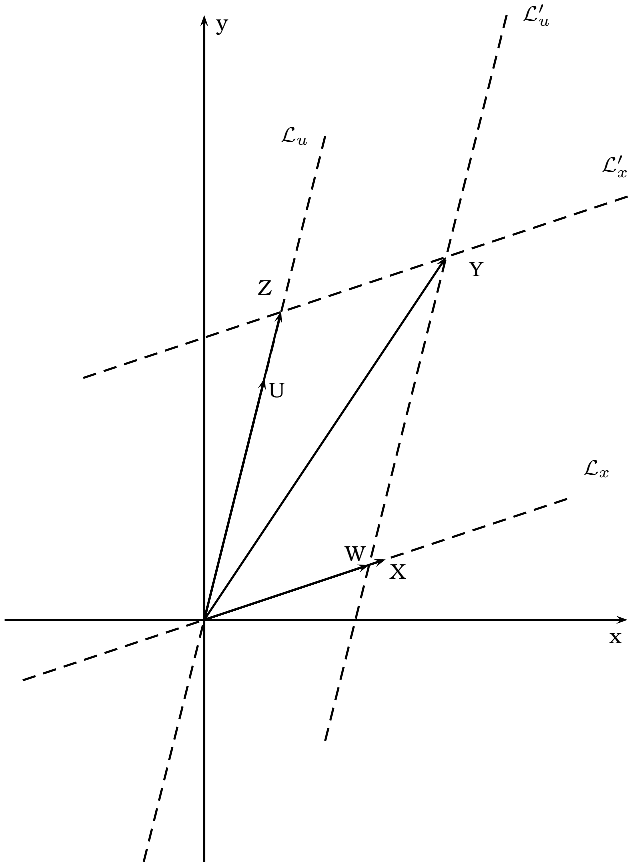

Figura 13

El cálculo preciso de los escalares r y s requiere manipulaciones algebraicas como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9. Hallemos los escalares r y s tales que $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La Figura 14 muestra el diagrama de la descomposición. Para calcular los valores de r y s resolvemos el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que se obtiene a partir de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} -2 &= 3r - s \\ 1 &= r - 2s. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera de estas dos ecuaciones por -2 y el resultado lo sumamos con la segunda ecuación obtenmos $5 = -5r$; luego $r = -1$. Este valor lo reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema para hallar el valor de s; éste es $s = -1$.

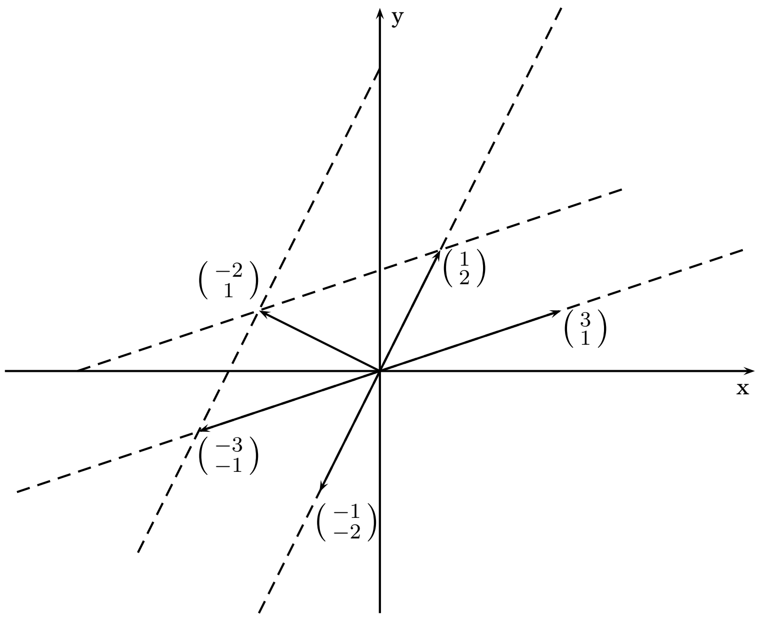

Figura 14

La "prueba"que hemos dado del teorema anterior nos proporciona una comprensión gráfica del contenido. Una prueba rigurosa requiere utilizar coordenadas. En el siguiente ejercicio se pide hacer la prueba con coordenadas; el lector debe tener presente el teorema sobre la caracterización de la dependencia lineal de vectores.

Ejercicio 1.6. Sean $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ dos vectores linealmente independientes. Sea $P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ cualquier vector del plano. Demuestre que existen escalares r y s únicos tales que $P = rA + sB$.

1.4. Magnitud y dirección de un vector. Ángulo entre vectores.

Definición 1.6. La *magnitud* o *norma* de un vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, denotada por $\|X\|$, es la cantidad

$$\|X\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ejemplo 1.10. Las magnitudes de los vectores $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ son: $\|A\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ y $\|B\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$. La magnitud del del vector nulo es $\|O\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

Como la raíz cuadrada de un número es no negativa entonces la magnitud de un vector nunca es negativa. De hecho el único vector con magnitud 0 es el vector nulo ya que la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0,$$

tiene como única solución $x = 0$ y $y = 0$; en cualquier otro caso la magnitud es positiva.

El Teorema de Pitágoras nos proporciona la interpretación geométrica de la magnitud de un vector. El triángulo con vértices $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es rectángulo (ver Figura 15); la magnitud del vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo y representa la distancia entre el origen y el punto X.

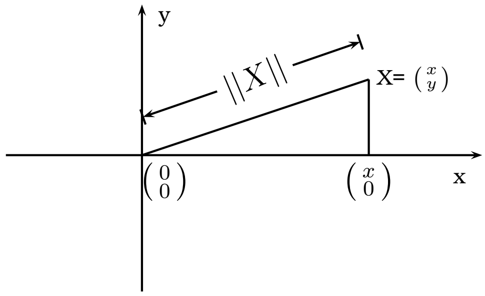

Figura 15

De manera más general tenemos la siguiente definición:

Definición 1.7. Sean $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ puntos del plano; la ecuación

$$\|X - U\| = \left\| \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2},$$

define la *distancia* entre los puntos X y U que simbolizamos por $\mathrm{dist}(X, U)$.

El paralelogramo con vértices O, X, U y $X - U$ de la Figura 16 justifica geométricamente la definición: los segmentos $\overline{XU}$ y $\overline{O(X-U)}$ tienen igual longitud.

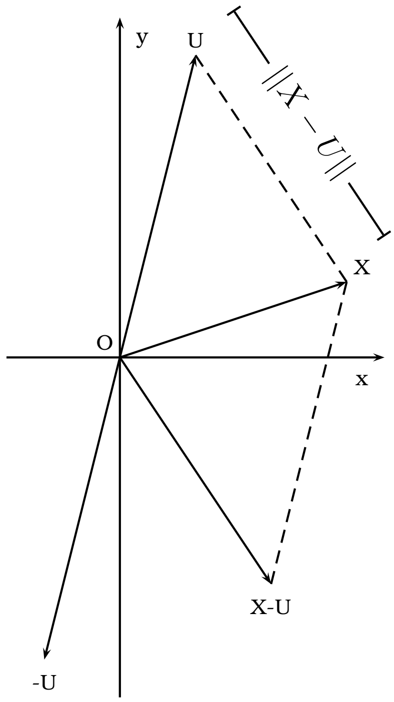

Figura 16

Ejemplo 1.11. El triángulo con vértices $A = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ es isósceles pues

$$\text{dist}(A,B) = \|A-B\| = \sqrt{(7-1)^2 + (-7-(-5))^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40},$$
$$\text{dist}(B,C) = \|B-C\| = \sqrt{(1-3)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40},$$
$$\text{dist}(A,C) = \|A-C\| = \sqrt{(7-3)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}.$$

La magnitud tiene las siguientes propiedades:

P1 $\|X\| \geq 0$ y $\|X\| = 0$ si y sólo si $X = O$,

P2 $\|rX\| = |r|\|X\|$,

P3 $\|X+U\| \leq \|X\| + \|U\|$.

Ya hemos comentado acerca de la primera propiedad. En cuanto a la segunda, para cualquier escalar r tenemos:

$$\|rX\| = \left\| \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = \sqrt{r^2x^2 + r^2y^2} = \sqrt{r^2(x^2+y^2)} = |r|\sqrt{x^2+y^2} = |r|\|X\|.$$

La tercera propiedad recibe el nombre de *desigualdad triangular* porque, si los vectores X y U son linealmente independientes, los lados del triángulo con vértices O, X y $X+U$ tienen longitudes $\|X\|$, $\|U\|$ y $\|X+U\|$ (ver Figura 17), y la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Desde luego, podemos dar una prueba rigurosa de la desigualdad triangular sin apelar a la visualización gráfica. Tal prueba es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que veremos en la próxima sección.

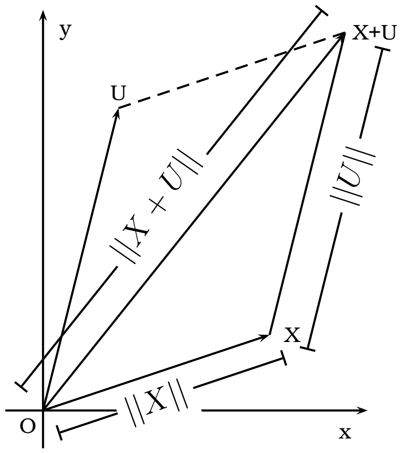

Figura 17

En Geometría Analitíca hay dos problemas fundamentales de los cuales nos vamos a ocupar en este curso. El primero consiste en hallar el conjunto de los puntos del plano cartesiano que satisfacen una o más condiciones expresadas en términos de igualdades y/o desigualdades en las variables x y y. El segundo problema es el recíproco del anterior; es decir, dado un *lugar geométrico*, es decir, dado un conjunto de puntos del plano cartesiano, hallar las igualdades y/o desigualdades que satisfacen las coordenadas x y y de los puntos pertenecientes a dicho lugar geométrico. Un ejemplo sencillo pero ilustrativo (e importante) de lo anterior lo constituye el lugar geométrico de una circunferencia.

Definición 1.8. Una *circunferencia* es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de otro punto llamado *centro*. La distancia de los puntos de la circunferencia al centro se llama *radio*.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un punto cualquiera de la circunferencia $\mathcal{K}$ con centro en $C = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y radio r entonces $\|X - C\| = r$ y por lo tanto

$$\left\| \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

Por lo tanto los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pertenecientes a la circunferencia $\mathcal{K}$ satisfacen la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{1.4}$$

De otra parte se puede ver que si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisface la ecuación anterior, entonces pertenece a la circunferencia $\mathcal{K}$.

Ejemplo 1.12. La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 1 es

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Denominamos *circunferencia unitaria* a la circunferencia del ejemplo anterior, y a sus puntos los llamamos *vectores unitarios*. Los vectores canónicos E_1 y E_2 son ejemplos de vectores unitarios pues: $\|E_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 = \sqrt{0^2 + 1^2} = \|E_2\|$. Ahora bien, a partir de todo vector distinto del vector cero podemos obtener un vector unitario de la siguiente forma: si $X \neq O$ entonces el vector $U = \frac{1}{\|X\|}X$ es unitario ya que

$$\|U\| = \left\| \frac{1}{\|X\|} X \right\| = \left| \frac{1}{\|X\|} \right| \|X\| = \frac{\|X\|}{\|X\|} = 1.$$

El proceso de obtener el vector $U = \frac{1}{\|X\|}X$ a partir del vector $X \neq O$ se llama *normalización* del vector X.

Ejemplo 1.13. Si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces $\|X\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Luego, al normalizar el vector X obtenemos

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Observemos que el vector normalizado U es un múltiplo escalar del vector X y por lo tanto pertenece a la recta generada por éste (ver Figura 18).

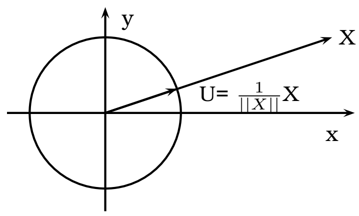

Figura 18

De nuevo supongamos que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un vector no nulo. El ángulo $\phi \in [0, 2\pi)$ en posición estándar cuyo lado terminal es el rayo $\{rX : r > 0\}$ es denominado la *dirección* del vector X, y escribimos $\text{dir}(X) = \phi$ (ver la Figura 19).

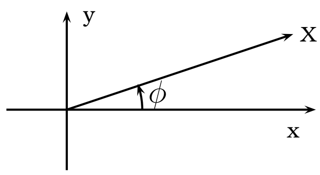

Figura 19

Sabemos de nuestro curso de trigonometría que cualquier otro ángulo ψ en posición estándar cuyo lado terminal sea también el rayo $\{rX : r > 0\}$ es de la forma $\psi = \phi + 2k\pi$, donde k es algún número entero. Además los valores de las funciones trigonométricas de ϕ y ψ son iguales, y están relacionadas con las coordenadas del vector X de la siguiente forma:

$$\text{sen}\phi = \frac{y}{\|X\|}, \quad \cos\phi = \frac{x}{\|X\|}.$$

Estas relaciones nos permiten escribir el vector X en la llamada *forma polar* (ver Figura 20)

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|X\|\text{cos}\phi \\ \|X\|\text{sen}\phi \end{pmatrix} = \|X\| \begin{pmatrix} \text{cos}\phi \\ \text{sen}\phi \end{pmatrix}.$$

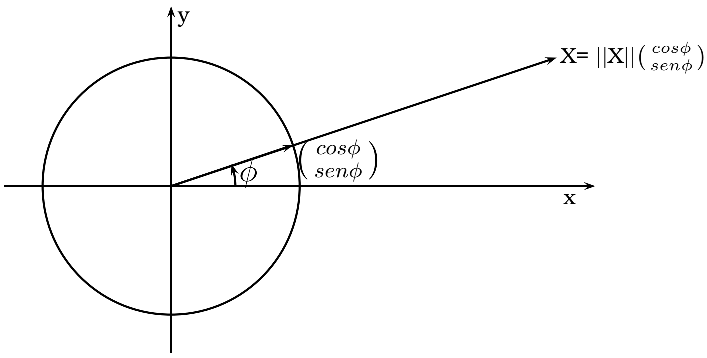

Figura 20

Observemos que el vector $\begin{pmatrix} \text{cos}\phi \\ \text{sen}\phi \end{pmatrix}$ es unitario pues $\text{cos}^2\phi + \text{sen}^2\phi = 1$ para cualquier ángulo ϕ. Además, en la forma polar podemos usar cualquier ángulo con lado terminal igual al del ángulo ϕ.

Ejemplo 1.14. Para calcular la dirección ϕ del vector $A = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ podemos usar la función tangente así:

$$\text{tan}\phi = \frac{-2}{-2} = 1;$$

puesto que el punto A está en el cuadrante III concluimos que

$$\phi = \pi + \text{Arctan}(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

La forma polar del vector A es por lo tanto

$$A = \|A\| \begin{pmatrix} \text{cos}\phi \\ \text{sen}\phi \end{pmatrix} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} \begin{pmatrix} \text{cos}\frac{5\pi}{4} \\ \text{sen}\frac{5\pi}{4} \end{pmatrix} = \sqrt{8} \begin{pmatrix} \text{cos}\frac{5\pi}{4} \\ \text{sen}\frac{5\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

Finalizamos la sección definiendo la noción de ángulo entre vectores. Si X y U son dos vectores no nulos con direcciones ϕ y ψ respectivamente, definimos el *ángulo* entre X y U, denotado $\measuredangle(X,U)$, por:

$$\measuredangle(X,U) = \begin{cases} |\phi - \psi|, & \text{si } |\phi - \psi| \leq \pi, \\ 2\pi - |\phi - \psi|, & \text{si } |\phi - \psi| > \pi. \end{cases}$$

El ángulo θ entre dos vectores es entonces un valor en el intervalo cerrado $[0,\pi]$, y toma uno de los dos extremos cuando un vector es un múltiplo escalar del otro: si $U = rX$ con $r > 0$, entonces $\phi = \psi$ en cuyo caso $\theta = 0$; en el caso $U = rX$ con $r < 0$, $\phi = \pi + \psi$ o $\psi = \pi + \phi$, y por lo tanto $\theta = \pi$. En la Figura 21 ilustramos el ángulo entre dos vectores.

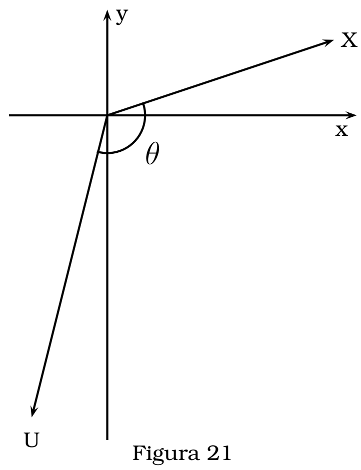

Figura 21

Observemos que $\measuredangle(X,U) = \measuredangle(U,X)$.

Definición 1.9. Sean X y U dos vectores del plano. Diremos que X y U son ortogonales si el ángulo entre ellos es $\pi/2$ $(90°)$.

Los vectores canónicos E_1 y E_2 son un ejemplo de vectores ortogonales pues $\text{dir}(E_1) = 0$ y $\text{dir}(E_2) = \pi/2$. En la próxima sección daremos una caracterización de la ortogonalidad de vectores.

Ejemplo 1.15. Consideremos los vectores $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Sean ϕ y ψ las direcciones de A y B, respectivamente. Puesto que $\tan\phi = \sqrt{3}$ y A está en el cuadrante I, la dirección de A es $\phi = \frac{\pi}{3}$. De otra parte, B está en el cuadrante IV y $\tan\psi = \frac{-2}{2} = -1$; por lo tanto $\psi = 2\pi + \arctan(-1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Se sigue que

$$|\phi - \psi| = |\frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{4}| = |-\frac{17\pi}{12}| = \frac{17\pi}{12} > \pi,$$

por consiguiente

$$\measuredangle(A, B) = 2\pi - \frac{17\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}.$$

1.5. Producto escalar o producto punto

La tercera operación entre vectores es el producto escalar que definimos a continuación.

Definición 1.10. Sean $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ vectores del plano. El *producto escalar* o *producto punto* entre X y U, denotado por $X \cdot U$, está definido por

$$X \cdot U = xu + yv. \tag{1.5}$$

El resultado de esta operación es un número real (o escalar) obtenido al sumar el producto de las primeras coordenadas al producto de las segundas coordenadas.

Ejemplo 1.16. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces $A \cdot B = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = -8 + 3 = -5$.

Hay varios casos especiales que debemos resaltar. Si $U = E_1$ y $U = E_2$

$$X \cdot E_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x \quad \text{y} \quad X \cdot E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y,$$

es decir, obtenemos, respectivamente, las coordenadas x y y del vector X.

Por otra parte

$$X \cdot X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 = \|X\|^2.$$

A continuación listamos las propiedades del producto escalar que son consecuencia de la artimética de los números reales.

Sean U, X y Y vectores del plano y r un escalar cualquiera. Tenemos:

P1. (Propiedad conmutativa): $X \cdot U = U \cdot X$,

P2. (Propiedad distributiva): $U \cdot (X + Y) = U \cdot X + U \cdot Y$,

P3. (Propiedad asociativa): $(rX) \cdot U = r(X \cdot U)$.

El producto escalar puede expresarse en términos geométricos involucrando el ángulo entre los vectores. Este resultado se utiliza a menudo como la definición de producto escalar.

Teorema 1.3. Sean $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ vectores no nulos del plano. Si $\theta = \measuredangle(X, U)$ entonces

$$X \cdot U = \|X\|\|U\| \cos\theta.$$

Prueba. El caso especial en el que U es múltiplo escalar del vector X lo dejamos al lector para que lo realice. Supongamos entonces que X y U son linealmente independientes. Para la prueba en este caso utilizaremos un argumento geométrico en el que se emplea la *Ley del coseno* de la trigonometría.

Los puntos O, X y U son los vértices de un triángulo en donde el ángulo θ es opuesto al lado con extremos X y U. Por la Ley del coseno tenemos

$$\|X - U\|^2 = \|X\|^2 + \|U\|^2 - 2\|X\|\|U\| \cos\theta;$$

pero

$$\begin{aligned} \|X - U\|^2 &= (X - U) \cdot (X - U) \\ &= X \cdot X - X \cdot U - U \cdot X + U \cdot U \\ &= \|X\|^2 - 2X \cdot U + \|U\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|X\|^2 - 2X \cdot U + \|U\|^2 = \|X\|^2 + \|U\|^2 - 2\|X\|\|U\| \cos\theta.$$

Después de cancelar los términos $\|X\|^2$ y $\|U\|^2$ obtenemos $-2X\cdot U = -2\|X\|\|U\|\cos\theta$; ahora dividimos por -2 ambos lados de esta última ecuación y llegamos al resultado requerido.□

Ejercicio 1.7. Complete la prueba del teorema anterior demostrando el resultado en el caso especial en el que el vector U es múltiplo escalar del vector X.

Corolario 1.1. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean X y U vectores del plano. Entonces

$$|X \cdot U| \leq \|X\|\|U\|.$$

Prueba. Sea θ el ángulo entre los vectores X y U. Por el teorema anterior y por el hecho de que $|\cos\theta| \leq 1$ para cualquier ángulo θ, tenemos

$$|X \cdot U| = \Big|\|X\|\|U\|\cos\theta\Big| = \|X\|\|U\||\cos\theta| \leq \|X\|\|U\|. \quad \square$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz puede probarse sin hacer uso del teorema anterior mediante un argumento netamente algebraico.

Ejercicio 1.8. Pruebe la desigualdad de Cauchy-Schwarz utilizando un argumento algebraico, sin apelar al teorema anterior.

Ejercicio 1.9. Pruebe la propiedad de la desigualdad triangular de la magnitud de vectores utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Corolario 1.2. Dos vectores no nulos del plano, X y U, son ortogonales si sólo si $X \cdot U = 0$.

Prueba. Sea $\theta = \measuredangle(X, U)$. Del teorema anterior tenemos

$$X \cdot U = \|X\|\|U\|\cos\theta.$$

Puesto que los vectores son no nulos entonces $\|X\| \neq 0 \neq \|U\|$. Se sigue de la ecuación anterior que $X \cdot U = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$. Pero $\theta \in [0, \pi]$, entonces la última ecuación se verifica si y sólo si $\theta = \pi/2$. □

Ejemplo 1.17. Los vectores $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ son ortogonales pues

$$A \cdot B = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-6) = 6 - 6 = 0.$$

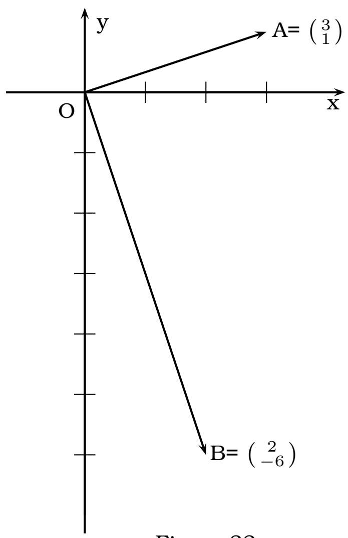

Figura 22

Ejemplo 1.18. Sean a y b números reales arbitrarios, y sean $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Entonces $A \cdot B = a \cdot (-b) + b \cdot a = -ab + ab = 0$. Similarmente, $A \cdot (-B) = a \cdot b + b \cdot (-a) = ab - ab = 0$. Luego, A es ortogonal a B y $(-B)$. La Figura 23 ilustra este ejemplo con $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

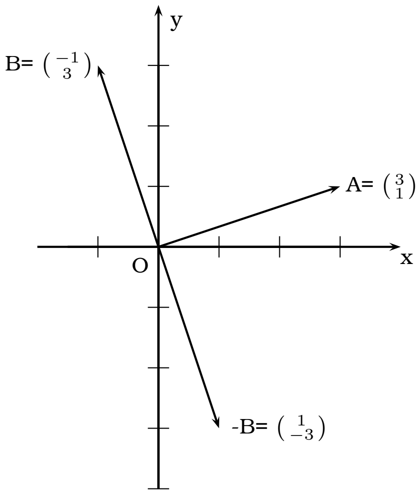

Figura 23

1.6. La línea recta

Excepto por la definición de ”recta generada por un vector”, dada en la Sección 3, hasta el momento hemos usado las idea de ’recta’ de una forma intuitiva. En esta sección abordaremos el tema en profundidad utilizando la herramienta de vectores que hemos construido.

Definición 1.11. Una *línea recta* es el conjunto de puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ que verifican una *ecuación general de primer grado* de la forma

$$ax + by + c = 0,$$

donde a, b y c son números reales, con a y b no simultáneamente iguales a cero.

Ejemplo 1.19. La recta $\mathcal{L}$ generada por un vector $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un ejemplo fundamental de línea recta. Recordemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$ si y sólo si

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ para algún escalar t. De esta igualdad vectorial se siguen las ecuaciones escalares $x = ut \quad$ y $\quad y = vt$.

Como el vector U es distinto del vector cero entonces, o bien $u \neq 0$ o $v \neq 0$. Por lo tanto el *parámetro* t puede despejarse de alguna de las dos ecuaciones escalares anteriores: si, por ejemplo, $u \neq 0$, entonces $t = \dfrac{x}{u}$ y por lo tanto $y = v\dfrac{x}{u}$ o, equivalentemente, $vx - uy = 0$, que tiene la forma de la ecuación de una línea recta con $a = v$, $b = -u$ y $c = 0$.

Observación 1.2. La ecuación de una línea recta dada en la definición se acostumbra llamar *forma general* o *ecuación general* de una línea recta. Observemos que multiplicar la ecuación general de una recta por un escalar diferente de cero no altera la línea recta sino la forma de su ecuación. Más aún, veremos más adelante que si una línea recta está representada por las ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, entonces hay un único escalar $r \neq 0$ tal que $\alpha = ar$, $\beta = br$ y $\gamma = cr$.

En la recta generada por un vector no nulo, el origen pertenece a la recta. Podemos ampliar esta idea fijando un punto del plano y considerando una recta que pase por dicho punto y que sea "paralela" a un vector no nulo (véase la Figura 24).

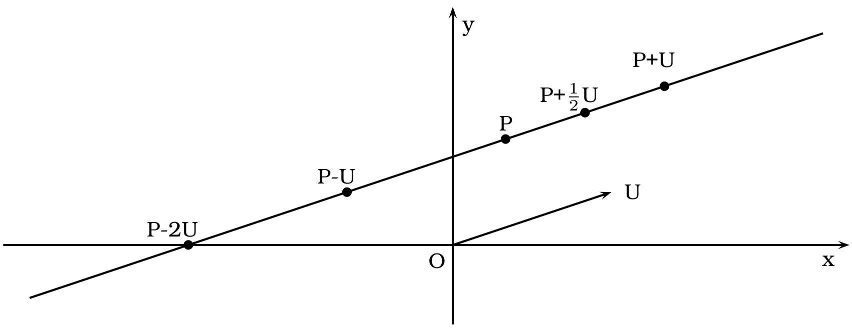

Figura 24

Definición 1.12. Sea P un punto del plano y sea U un vector no nulo. La *recta* *dirigida por el vector* U *que pasa por* P es el conjunto de puntos

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2 : X = P + tU, t \in \mathbb{R}\right\}. \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.20. La recta $\mathcal{L}$ dirigida por el vector $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ es el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

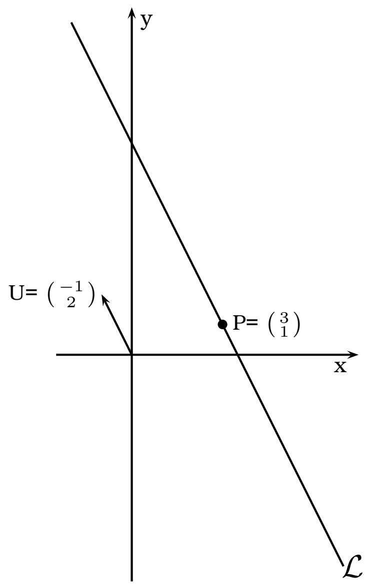

Figura 25

La igualdad vectorial (1.6) equivale a dos ecuaciones escalares; de hecho, si escribimos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ entonces

$$X = P + tU \iff x = x_0 + ut \quad \text{y} \quad y = y_0 + vt. \tag{1.7}$$

Las ecuaciones escalares (1.7) se llaman *ecuaciones paramétricas* de la recta dirigida por U y que pasa por P.

Un procedimiento similar al que hicimos un poco antes con la recta generada por un vector, lo podemos replicar en este caso. Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} x = x_0 + ut \quad \text{y} \quad y = y_0 + vt &\iff \frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} \\ &\iff vx - vx_0 = uy - uy_0 \\ &\iff vx - uy + uy_0 - vx_0 = 0, \end{aligned}$$

que tiene la forma general de la línea recta con $a = v$, $b = -u$ y $c = uy_0 - vx_0$. Los casos $u \neq 0, v = 0$ y $u = 0, v \neq 0$ son muy parecidos y conducen, respectivamente, a las ecuaciones $-uy + uy_0 = 0$ y $vx - vx_0 = 0$. Así que toda recta que pasa por un punto y es dirigida por un vector es, en realidad, una línea recta de acuerdo con nuestra definición; dicho de otra manera, el punto y el vector no nulo *determinan* una línea recta.

Igualmente importante es el hecho de que toda línea recta es determinada por un punto y un vector no nulo al cual llamamos vector *director* de la recta. Esta afirmación es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 1.4. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta con ecuación $ax + by + c = 0$, con $a \neq 0$. Entonces

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observación 1.3. El teorema nos dice específicamente que $\mathcal{L}$ es expresable como la recta que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \end{pmatrix}$ y es dirigida por el vector $U = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Si en la ecuación general de $\mathcal{L}$, b es distinto de cero, entonces el lector puede probar que $\mathcal{L}$ es expresable como la recta que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b \end{pmatrix}$ y es dirigida por el vector $U = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Prueba. Denotemos por $\mathcal{L}'$ el conjunto

$$\mathcal{L}' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

y veamos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. Supongamos inicialmente que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$. Puesto que $a \neq 0$, al despejar x de la ecuación de $\mathcal{L}$ obtenemos $x = \frac{-c}{a} + \frac{-b}{a}y$. Entonces, asignemos al parámetro t el valor $t = \frac{y}{a}$. Se sigue que $y = 0 + at$ y $x = \frac{-c}{a} - bt$; es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}'$. Recíprocamente, si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}'$, entonces $y = at$ y $x = \frac{-c}{a} - bt$. De la primera de estas dos ecuaciones se sigue que $t = \frac{y}{a}$; este valor lo sustituimos en la ecuación de x y obtenemos $x = \frac{-c}{a} - b\frac{y}{a}$, luego $ax + by + c = 0$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$. $\square$

Ejercicio 1.10. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta con ecuación $ax + by + c = 0$, con $b \neq 0$. Pruebe que

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cuando una línea recta se escribe en la forma de recta dirigida decimos que está escrita en forma *vectorial*. Una línea recta admite múltiples representaciones vectoriales; veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.21. La recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y con vector director

$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es el conjunto

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^2 : X = P + tU, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Resolviendo de las ecuaciones paramétricas para el parámetro t obtenemos $t = \frac{x-3}{-1}$ y $t = \frac{y-1}{2}$. Al igualar estos valores obtenemos una ecuación general de $\mathcal{L}$, a saber: $2x + y - 7 = 0$. Luego $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x + y - 7 = 0 \right\}$.

Ahora bien, el punto $Q = P + U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{L}$; además el vector $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ es múltiplo escalar del vector U. Afirmamos que:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para probar la afirmación basta verificar que el conjunto

$$\mathcal{L}' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\},$$

es igual al conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x + y - 7 = 0 \right\}$. Para esto empleamos el mismo procedimiento que hicimos con la recta $\mathcal{L}$: si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}'$, entonces de sus ecuaciones paramétricas resolvemos para el parámetro s y obtenemos $s = \frac{x-2}{2}$ y $s = \frac{y-3}{-4}$. Igualando estos valores llegamos a la ecuación $4x + 2y - 14 = 0$, la cual, al dividir por 2, resulta en $2x + y - 7 = 0$. Los pasos son reversibles como puede verificarlo el lector. Así que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ están completamente determinados por la ecuación general $2x + y - 7 = 0$ y por lo tanto, $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.

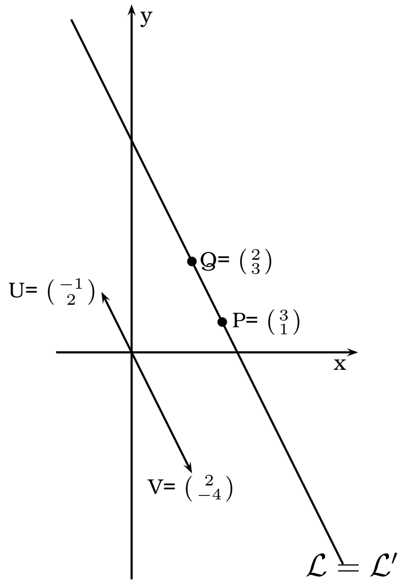

Figura 26

Es natural preguntarse por la relación que pueda existir entre los vectores directores de una misma recta. En el ejemplo anterior el vector V es múltiplo escalar del vector U. Esto es lo que ocurre de manera general como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.5. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta. Si U y V son vectores directores de $\mathcal{L}$ entonces son linealmente dependientes. Recíprocamente, si U y V son linealmente dependientes y U es vector director de $\mathcal{L}$ entonces V también es vector director de $\mathcal{L}$.

Prueba. Supongamos primero que U y V son vectores directores de $\mathcal{L}$. Esto quiere decir que $\mathcal{L}$ puede expresarse de las formas

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2 : X = P + tU, t \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{X \in \mathbb{R}^2 : X = Q + sV, s \in \mathbb{R}\right\},$$

donde P y Q pertenecen a $\mathcal{L}$. Consideremos el caso $P \neq Q$ (el caso $P = Q$ lo dejamos al lector para que lo verifique). Entonces hay escalares t' y s' diferentes de cero tales que $Q = P + t'U$ y $P = Q + s'V$. Por lo tanto $t'U = Q - P = (-s')V$, luego $U = (-s'/t')V$ y por lo tanto U y V son linealmente dependientes.

Ahora supongamos que U y V son linealmente dependientes y que U es vector director de $\mathcal{L}$. Entonces existe un escalar $r \neq 0$ tal que $U = rV$. De la forma vectorial de $\mathcal{L}$ tenemos: $X = P + tU = P + t(rV) = P + (rt)V$. Ahora bien, como r es un ecalar fijo, y el parámetro t toma todos lo valores reales, entonces el producto $s = rt$ es un parámetro que también toma todos los valores reales. Por consiguiente $\mathcal{L}$ es expresable en la forma

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2 : X = P + sV, s \in \mathbb{R}\right\},$$

luego V es vector director de $\mathcal{L}$. □

Corolario 1.3. Sea $\mathcal{L}$ la línea recta con ecuación general $ax + by + c = 0$. Entonces los vectores directores de $\mathcal{L}$ son los múltiplos escalares del vector $D = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Prueba. El Teorema 1.4 y el Ejercicio 1.9 nos dan que el vector $D = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ es vector director de $\mathcal{L}$. El resultado se sigue ahora del teorema anterior.□

Ejemplo 1.22. La recta $\mathcal{L}$ del Ejemplo 1.21 tiene por ecuación general $2x + y - 7 = 0$. Entonces los vectores directores de $\mathcal{L}$ son los múltiplos escalares del vector $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; en otras palabras, el conjunto de vectores directores de $\mathcal{L}$ es la recta generada por el vector D.

Con lo estudiado hasta el momento podemos indagar sobre condiciones que determinan una línea recta. Quizá la más gráfica o intuitiva se refiere a la línea recta determinada por dos puntos distintos del plano. Si P y Q son dos puntos distintos del plano, entonces la línea recta cuya forma vectorial es

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2 : X = P + t(Q - P), t \in \mathbb{R}\right\}. \tag{1.8}$$

pasa por los puntos P y Q. El punto Q se obtiene con $t = 1$ y P con $t = 0$. Esta recta tiene como vector director $D = Q - P$ y, en virtud del siguiente teorema, la llamamos la *línea recta determinada por* P *y* Q (ver Figura 27).

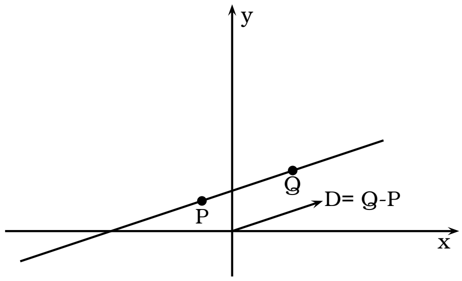

Figura 27: Recta determinada por P y Q

Teorema 1.6. Sean P y Q dos puntos distintos del plano. Si $\mathcal{L}$ es cualquier línea recta que pasa por P y Q entonces

$$\mathcal{L} = \Big\{X \in \mathbb{R}^2 : X = P + t(Q - P), t \in \mathbb{R}\Big\}. \tag{1.9}$$

Prueba. Escribamos $\mathcal{L}' = \Big\{X \in \mathbb{R}^2 : X = P + t(Q - P), t \in \mathbb{R}\Big\}$. Ya hemos visto que P y Q pertenecen a $\mathcal{L}'$. Debemos probar que $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. Supongamos que una representación vectorial de $\mathcal{L}$ es

$$\mathcal{L} = \Big\{X \in \mathbb{R}^2 : X = R + sD, s \in \mathbb{R}\Big\}, \tag{1.10}$$

donde $R \in \mathcal{L}$ y D es un vector director de $\mathcal{L}$. Puesto que P y Q son dos puntos distintos pertenecientes a $\mathcal{L}$ existen escalares s' y s'' diferentes tales que $P = R + s'D$ y $Q = R + s''D$. Luego $Q - P = (s'' - s')D$ o $D = \dfrac{1}{s'' - s'}(Q - P)$.
Sea $X = P + t(Q - P)$ un punto cualquiera de $\mathcal{L}'$. Entonces

$$X = R + s'D + t(s'' - s')D = R + (ts'' - ts' + s')D;$$

por lo tanto $X \in \mathcal{L}$. Recíprocamente, si $X = R + sD$ es un punto cualquiera de $\mathcal{L}$, entonces

$$X = R+sD = P-s'D+sD = P+(s-s')D = P+(s-s')\frac{1}{s'' - s'}(Q-P) = P+\frac{s - s'}{s'' - s'}(Q-P),$$

luego $X \in \mathcal{L}'$, y por lo tanto $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. □

Ejemplo 1.23. La línea recta que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene como vector director $Q - P = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, y por lo tanto una forma vectorial de la misma es

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4t \\ 2-t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

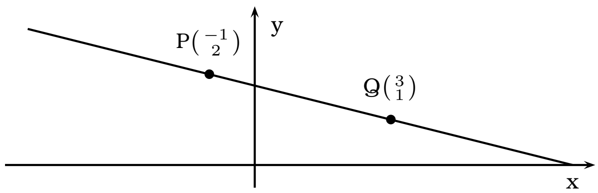

Figura 28

Debemos insistir que la anterior no es la única representación vectorial de la recta que pasa por los puntos P y Q. Hay infinidad de representaciones vectoriales de la misma que dependen del punto elegido sobre la recta y del vector director escogido.

Ejercicio 1.11. Encuentre otras tres representaciones vectoriales para la recta del ejemplo anterior.

Otra condición menos intuitiva que determina una línea recta usa un vector ”perpendicular” a la recta en lugar de un vector director. Esta condición resulta ser muy útil porque nos proporciona automáticamente una ecuación general de la recta. Empecemos por precisar la noción de vector perpendicular a una recta.

Definición 1.13. Un vector no nulo N es *normal* a una recta $\mathcal{L}$ si N es ortogonal a cualquier vector director de $\mathcal{L}$.

Ejemplo 1.24. El vector $\widehat{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es normal a la recta $\mathcal{L}$ con ecuación general $ax + by + c =$. Esto es así porque ya sabemos que el vector $D = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ es vector director de $\mathcal{L}$, y $\widehat{N} \cdot D = a \cdot (-b) + b \cdot a = -ab + ab = 0$. El vector $-\widehat{N}$ también es normal a $\mathcal{L}$ porque $(-\widehat{N}) \cdot D = (-1)(\widehat{N} \cdot D) = (-1) \cdot 0 = 0$.

Observación 1.4. La importancia del ejemplo anterior no debe pasar inadvertida; en la ecuación general de una recta podemos reconocer un vector normal a ella a partir de los coeficientes que acompañan a las variables x y y.

De otra parte, para verificar la normalidad de un vector no nulo N con respecto a una recta $\mathcal{L}$, basta confirmar la ortogonalidad de N con respecto a uno solo de los vectores directores de $\mathcal{L}$, digamos D, ya que cualquier otro vector director de $\mathcal{L}$ es múltiplo escalar de éste, y por lo tanto $N \cdot (rD) = r(N \cdot D) = r \cdot 0 = 0$. Así mismo, si un vector no nulo N es normal a $\mathcal{L}$, entonces todo múltiplo escalar de N también es normal a dicha recta pues, $(rN) \cdot D = r(N \cdot D) = r \cdot 0 = 0$. Más aún, tenemos el siguiente teorema análogo al Teorema 1.5.

Teorema 1.7. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta. Si N y N' son vectores no nulos normales a una recta $\mathcal{L}$ entonces son linealmente dependientes. Recíprocamente, si N y N' son linealmente dependientes y N es un vector no nulo normal a $\mathcal{L}$ entonces N' también es vector normal a $\mathcal{L}$.

Prueba. El recíproco lo acabamos de verificar. Supongamos entonces que N y N' son vectores no nulos normales a $\mathcal{L}$ y sea $ax + by + c = 0$ una ecuación general de $\mathcal{L}$. Ya sabemos por el Ejemplo 1.24 que el vector $\widehat{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector no nulo normal a $\mathcal{L}$. Por lo tanto, para probar la afirmación de que N y N' son linealmente dependientes es suficiente demostrar que cada uno de ellos es múltiplo escalar de $\widehat{N}$. Como el procedimiento es el mismo para ambos vectores sólo se requiere hacerlo para uno de los dos, digamos N. Escribamos $N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. El vector $D = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ es vector director de $\mathcal{L}$, luego la normalidad de N con respecto a $\mathcal{L}$ implica

$$N \cdot D = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -\alpha b + \beta a = 0. \tag{1.11}$$

Si $a \neq 0$ se sigue de la ecuación 1.11 que $\beta = \dfrac{\alpha b}{a}$ y por lo tanto

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\alpha b}{a} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{a} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{a} \widehat{N}.$$

En el caso $b \neq 0$ la ecuación 1.11 nos da $\alpha = \dfrac{\beta a}{b}$, luego

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta a}{b} \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\beta}{b} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\beta}{b} \widehat{N}. \quad \square$$

El siguiente teorema nos dice que una línea recta queda determinada por un punto específico de la recta y un vector normal a la misma.

Teorema 1.8. Sea $N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vector normal a una línea recta $\mathcal{L}$, y sea $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un punto perteneciente a $\mathcal{L}$. Entonces,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \iff N \cdot X - N \cdot P = 0 \iff \alpha x + \beta y - (\alpha x_0 + \beta y_0) = 0. \tag{1.12}$$

La ecuación 1.12 se llama *forma normal* de la recta $\mathcal{L}$. *Prueba.* Sea D un vector director de $\mathcal{L}$. Supongamos inicialmente que $X \in \mathcal{L}$. Entonces $X = P + tD$ para algún escalar t. Por lo tanto

$$N \cdot X = N \cdot (P + tD) = N \cdot P + N \cdot (tD) = N \cdot P + t(N \cdot D) = N \cdot P,$$

ya que $N \cdot D = 0$. Se sigue que $N \cdot X - N \cdot P = 0$ que es equivalente a la ecuación 1.12.

Recíprocamente, supongamos que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cumple la ecuación 1.12. Entonces $N \cdot X - N \cdot P = 0$; luego $N \cdot (X - P) = 0$; es decir, el vector $X - P$ es perpendicular a N y por consiguiente debe ser un múltiplo escalar de D, luego $X - P = t'D$ para algún escalar t'. Pero esto último quiere decir que $X \in \mathcal{L}$. □

Como lo mencionamos antes, al usar un vector normal a la línea recta en lugar de un vector director conseguimos automáticamente una ecuación general de la línea recta. Ilustremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 1.25. Consideremos la línea recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y con vector director $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ver Figura 29). Entonces un vector perpendicular a $\mathcal{L}$ es $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Al desarrollar las operaciones obtenemos la ecuación $-x + 3y - (1 + 6) = 0$ o $x - 3y + 7 = 0$.

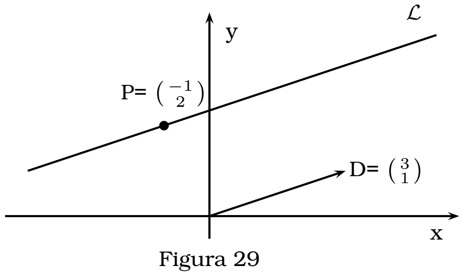

Figura 29

Corolario 1.4. Si $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ son ecuaciones generales de una misma recta entonces existe un único escalar r tal que $\alpha = ra$, $\beta = rb$ y $\gamma = rc$.

Prueba. (Ejercicio)

1.7. Rectas paralelas y perpendiculares. Ángulo entre rectas.

Definición 1.14. Dos líneas rectas diferentes $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son *paralelas*, y escribimos $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}'$, si sus vectores directores son linealmente dependientes.

Ejemplo 1.26. La recta $\mathcal{L}$ con forma vectorial

$$\mathcal{L} = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} t \in \mathbb{R} \right\}$$

es paralela a la recta $\mathcal{L}'$ con ecuación $8x+6y-12=0$ porque el vector $V = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ es vector director de $\mathcal{L}'$ y $V = 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ver Figura 30).

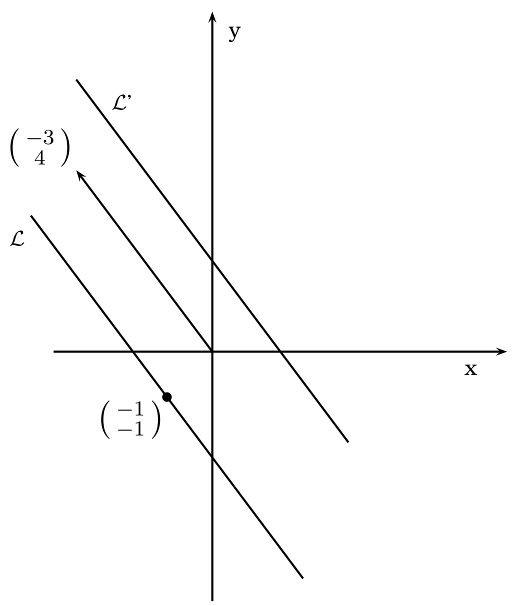

Figura 30

Las líneas rectas *horizontales* son las paralelas a la recta generada por E_1 (eje x) y las *verticales* son las paralelas a la recta generada por E_2 (eje y). Por consiguiente, una recta $\mathcal{L}$ horizontal tiene una forma vectorial del tipo

$$\mathcal{L} = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : X = P + tE_1, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

donde $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$. De la forma vectorial deducimos las ecuaciones escalares $x = x_0 + t$ y $y = y_0$, donde el parámetro t recorre el conjunto de los números reales. Por lo tanto, independientemente del valor de t, la coordenada y de los puntos de una recta horizontal permanece constante y por eso una ecuación general de $\mathcal{L}$ es $y = y_0$ o $y - y_0 = 0$. Esta ecuación general también la pudimos haber obtenido de (1.12) con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ porque el vector $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal a cualquier línea recta horizontal.

En forma completamente análoga, el lector puede verificar que una recta vertical $\mathcal{L}'$ que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tiene por ecuaciones paramétricas $x = x_0$, $y = y_0 + t$, con $t \in \mathbb{R}$, y por ecuación general $x - x_0 = 0$. (Ver Figura 31).

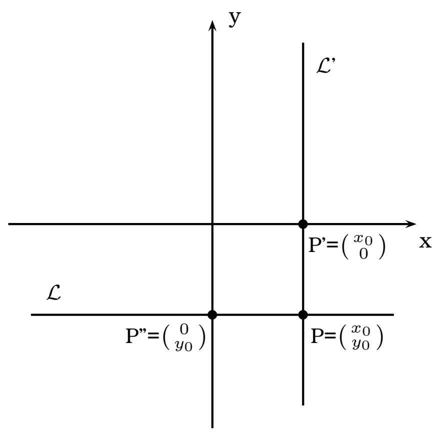

Figura 31

Observación 1.5. Como dos líneas rectas tienen vectores directores linealmente dependientes si y sólo si tienen vectores normales linealmente dependientes entonces, la condición de paralelismo entre rectas se puede refrasear en términos de vectores ortogonales; es decir, dos líneas rectas son paralelas si sus vectores ortogonales son linealmente dependientes.

Para las líneas rectas no verticales tenemos, adicionalmente, el concepto de "pendiente" que nos permite medir la inclinación de la recta con respecto al eje x.

Definición 1.15. Sea $\mathcal{L}$ una recta no vertical con vector director $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$. La *pendiente* de $\mathcal{L}$, denotada por m, es el cociente $m = \dfrac{d_2}{d_1}$.

Lo primero que debemos resaltar es que el valor de la pendiente m no depende del vector director escogido porque si D' también es vector director de $\mathcal{L}$ entonces $D' = rD = \begin{pmatrix} rd_2 \\ rd_1 \end{pmatrix}$ para algún escalar r, y por lo tanto $\dfrac{rd_2}{rd_1} = \dfrac{d_2}{d_1}$. Por consiguiente, si $\mathcal{L}$ tiene por ecuación general $ax + by + c = 0$, con $a \neq 0$, su pendiente es $m = -\frac{a}{b}$ pues $D = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ es vector director de $\mathcal{L}$.

Ejemplo 1.27. La pendiente m de la línea recta $\mathcal{L}$ con ecuación general $3x + 4y - 25 = 0$ es $m = \frac{-3}{4}$.

De otra parte, si m es la pendiente de una líne recta no vertical $\mathcal{L}$, con vector director $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ entonces $m = \frac{d_2}{d_1}$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_1 m \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Por consiguiente $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ también es vector director de $\mathcal{L}$.

Observación 1.6. De las definiciones de rectas paralelas y pendiente se deduce de manera inmediata que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.

En una línea recta no vertical $\mathcal{L}$ también destacamos su punto $B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ de intersección con el eje y. Al escalar b se le llama usualmente *intercepto* de la recta. Puesto que $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal a $\mathcal{L}$, una ecuación general de $\mathcal{L}$ es entonces $-mx + y - b = 0$ o $y = mx + b$, la cual es llamada la forma $pendiente-intercepto$ de $\mathcal{L}$. Esta forma escalar de la ecuación de $\mathcal{L}$ es particularmente importante porque contiene mucha información geométrica sobre la recta. (Ver Figura 32).

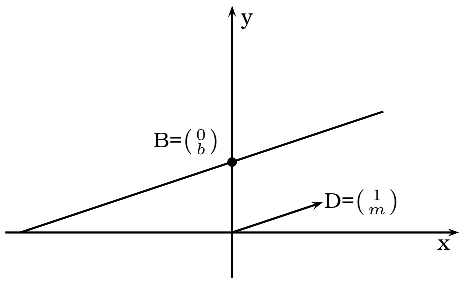

Figura 32. Forma pendiente-intercepto

Si la recta no vertical $\mathcal{L}$ pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ entonces $Q - P = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ es vector director de $\mathcal{L}$ y por lo tanto la pendiente de la recta es el cociente $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Más generalmente, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un punto arbitrario de $\mathcal{L}$ diferente de P entonces $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$. De aquí resulta la forma escalar *punto-pendiente* de la ecuación de $\mathcal{L}$, a saber: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Definición 1.16. Sea $\mathcal{L}$ una recta no vertical con vector director D. Definimos el *ángulo de inclinación* de $\mathcal{L}$, denotado α, por

$$\alpha = \begin{cases} \text{dir}(D), & \text{si } \text{dir}(D) \leq \pi, \\ \text{dir}(-D), & \text{si } \pi < \text{dir}(D) < 2\pi. \end{cases} \tag{1.13}$$

Visualmente, α es el ángulo medido en sentido antihorario desde el eje x hasta encontrarse por vez primera la recta $\mathcal{L}$; es, por defininción, el ángulo de inclinación de la recta generada por el vector director D. Así que líneas rectas paralelas tendrán todas el mismo ángulo de inclinación (ver Figura 33). La relación entre la pendiente y el ángulo de inclinación es el contenido de la siguiente proposición.

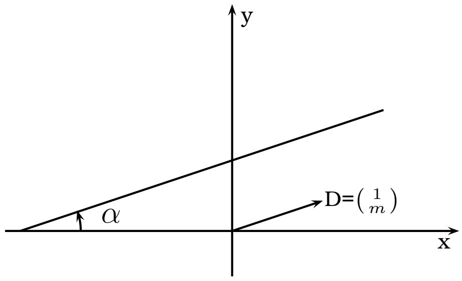

Figura 33

Proposición 1.1. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta no vertical con pendiente m y ángulo de inclinación α. Entonces $m = \tan\alpha$.

Prueba. El vector $D = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ es vector director de $\mathcal{L}$. Sea $\theta = \text{dir}(D)$. Si $m > 0$ entonces $\theta = \alpha$ y por lo tanto $m = \tan\theta = \tan\alpha$; y si $m < 0$ entonces $\alpha = \text{dir}(-D) = \theta - \pi$ en cuyo caso $m = \tan\theta = \tan(\theta - \pi) = \tan\alpha$. $\square$

Definición 1.17. Dos líneas rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son perpendiculares, y escribimos $\mathcal{L} \perp \mathcal{L}'$, si sus vectores directores son ortogonales o, equivalentemente, si sus vectores normales son ortogonales.

Ejemplo 1.28. Las línea recta $\mathcal{L}$ con ecuación general $3x - 4y + 5 = 0$ es perpendicular a la línea recta $\mathcal{L}'$ con ecuación vectorial $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ porque sus vectores directores $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $D' = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ son ortogonales, pues $D \cdot D' = 4 \cdot 6 + 3 \cdot (-8) = 24 - 24 = 0$

Un criterio eficiente de perpendicularidad de líneas rectas no verticales es el siguiente.

Proposición 1.2. Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos líneas rectas no verticales con pendientes m y m' respectivamente. Entonces $\mathcal{L} \perp \mathcal{L}'$ si y sólo si $mm' = -1$.

Prueba. $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ tienen vectores directores $D = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ y $D' = \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \perp \mathcal{L}' &\iff D \cdot D' = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 1 \cdot 1 + m \cdot m' = 0 \\ &\iff 1 + mm' = 0 \\ &\iff mm' = -1. \ \square \end{aligned}$$

Terminamos esta sección con el concepto de ángulo entre líneas rectas. Lo que haremos es generalizar la idea de ángulo de inclinación. El lector puede demostrar con todo rigor que dos líneas rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ no paralelas concurren en un punto, y dividen el plano en cuatro sectores o ángulos (ver Figura 34). Visualmente, podemos definir el ángulo orientado desde la línea recta $\mathcal{L}$ hasta la línea recta $\mathcal{L}'$ como el ángulo barrido en sentido antihorario desde uno cualquiera de los rayos de $\mathcal{L}$ hasta el primer rayo que nos encontremos de $\mathcal{L}'$. Esta idea gráfica (que podría ser suficiente en muchas de las aplicaciones) puede precisarse usando los vectores directores de ambas rectas. Para este efecto veamos primero la noción de ángulo orientado de vectores.

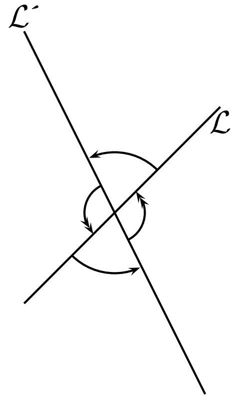

Figura 34

Definición 1.18. Sean X y U dos vectores no nulos con direcciones ϕ y ψ, respectivamente. Definimos el *ángulo orientado del vector X al vector U*, denotado por $\measuredangle\langle X, U\rangle$, como

$$\measuredangle\langle X, U\rangle = \begin{cases} \psi - \phi & \text{si } \psi - \phi \geq 0, \\ 2\pi + (\psi - \phi) & \text{si } \psi - \phi < 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

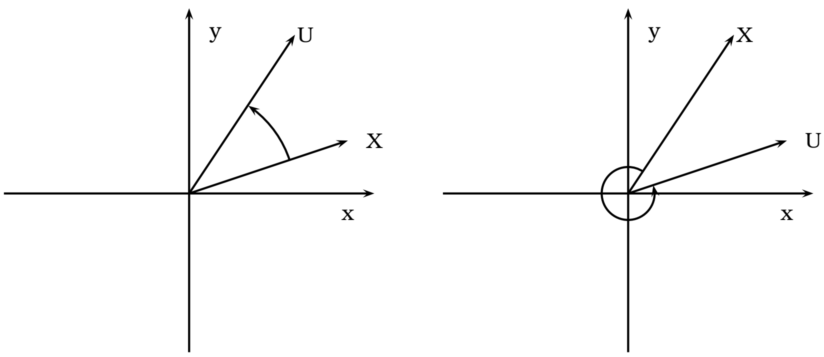

Figura 35

Ejemplo 1.29. El ángulo orientado del vector E_1 al vector E_2 es $\measuredangle\langle E_1, E_2\rangle = \pi/2 - 0 = \pi/2$, mientras que el ángulo orientado del vector E_2 al vector E_1 es $\measuredangle\langle E_2, E_1\rangle = 2\pi - \pi/2 = 3\pi/2$.

Observación 1.7. Por lo general, el ángulo orientado del vector X al vector U es distinto al ángulo orientado del vector U al vector X. De hecho, $\measuredangle\langle X, U\rangle = \measuredangle\langle U, X\rangle$ si y sólo si X y U son linealmente dependientes, como lo puede demostrar el lector. Por otro lado, a diferencia del ángulo entre dos vectores que siempre está en el intervalo $[0, \pi]$, el ángulo orientado de un vector a otro puede tomar valores en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Ejercicio 1.12. Sean X y U dos vectores no nulos. Pruebe que $\measuredangle\langle X, U\rangle = \measuredangle\langle U, X\rangle =$ si y sólo si X y U son linealmente dependientes.

Ejercicio 1.13. Sean X y U dos vectores no nulos. Pruebe que $\measuredangle\langle X, U\rangle - \measuredangle\langle X, -U\rangle = \pm\pi$.

Ahora podemos definir el ángulo orientado entre dos rectas no paralelas.

Definición 1.19. Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos líneas rectas no paralelas con vectores directores D y D' respectivamente. Definimos el *ángulo orientado de la recta $\mathcal{L}$ a la recta $\mathcal{L}'$*, denotado por $\measuredangle\langle \mathcal{L}, \mathcal{L}'\rangle$, como

$$\measuredangle\langle \mathcal{L}, \mathcal{L}'\rangle = \begin{cases} \measuredangle\langle D, D'\rangle & \text{si } 0 < \measuredangle\langle D, D'\rangle < \pi, \\ \measuredangle\langle D, -D'\rangle & \text{si } \pi < \measuredangle\langle D, D'\rangle < 2\pi. \end{cases} \tag{1.15}$$

Ejemplo 1.30. Consideremos las rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ con ecuaciones generales $x + y - 1 = 0$ y $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$. Los vectores $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D' = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ son, respectivamente, vectores directores de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ (ver Figura 36). La dirección del vector D es $3\pi/4$, y la dirección del vector D' es $2\pi/3$. Por lo tanto el ángulo orientado del vector D al vector D' mide $\measuredangle\langle D, D'\rangle = 2\pi + (2\pi/3 - 3\pi/4) = 2\pi - \pi/12 = 23\pi/12$, que es mayor que π. Luego, $\measuredangle\langle \mathcal{L}, \mathcal{L}'\rangle = \measuredangle\langle D, -D'\rangle = 5\pi/3 - 3\pi/4 = 11\pi/12$. De otra parte, el ángulo orientado de D' a D mide $\measuredangle\langle D', D\rangle = 3\pi/4 - 2\pi/3 = \pi/12$, cantidad que es menor que π. Por lo tanto el ángulo orientado de $\mathcal{L}'$ a $\mathcal{L}$ es $\measuredangle\langle \mathcal{L}', \mathcal{L}\rangle = \measuredangle\langle D', D\rangle = \pi/12$.

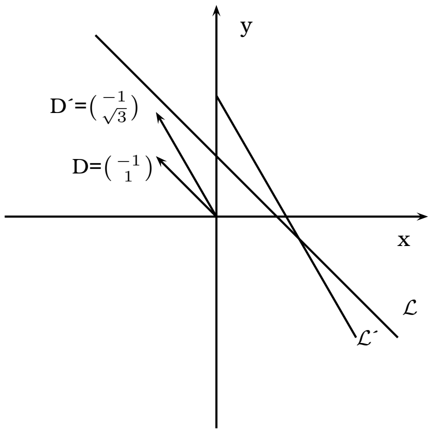

Figura 36

Observación 1.8. El lector puede concluir de la Figura 34 que $\measuredangle\langle\mathcal{L},\mathcal{L}'\rangle + \measuredangle\langle\mathcal{L}',\mathcal{L}\rangle = \pi$. Lo invitamos a que haga una demostración de este hecho.

Cuando ninguna de las dos líneas rectas es vertical disponemos de una fórmula que nos permite calcular el ángulo orientado de una recta a la otra, a partir de las pendientes de las rectas.

Teorema 1.9. Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos líneas rectas no verticales y no perpendiculares con pendientes m y m', respectivamente. Si $\theta = \measuredangle\langle\mathcal{L},\mathcal{L}'\rangle$ entonces

$$\tan\theta = \frac{m'-m}{1+m'm}. \tag{1.16}$$

Prueba. Sean D y D' vectores directores de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ con direcciones ϕ y ψ, respectivamente. Del Ejercicio 1.13, $\measuredangle\langle D,-D'\rangle = \measuredangle\langle D,D'\rangle \pm \pi$. Luego, $\tan(\measuredangle\langle D,D'\rangle) = \tan(\measuredangle\langle D,-D'\rangle)$; se sigue de la ecuación (1.15) en la Definición 1.19 que $\tan\theta = \tan(\measuredangle\langle D,D'\rangle)$. Ahora bien, por la ecuación (1.14) en la Definición 1.18 tenemos que $\tan(\measuredangle\langle D,D'\rangle) = \tan(\psi-\phi)$, por consiguiente

$$\tan\theta = \tan(\psi-\phi) = \frac{\tan\psi-\tan\phi}{1+\tan\psi\tan\phi} = \frac{m'-m}{1+m'm}. \quad \square$$

Ejemplo 1.31. En las líneas rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ del Ejemplo 1.30, $m=-1$ y $m'=-\sqrt{3}$. Por lo tanto, si θ es el ángulo orientado de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$, tenemos

$$\tan\theta = \frac{m'-m}{1+m'm} = \frac{-\sqrt{3}-(-1)}{1+(-\sqrt{3})(-1)} = \frac{-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}}.$$

Como θ toma valores en el intervalo $[0, \pi]$ concluimos que

$$\theta = \pi - \arctan \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \pi - \arctan(2 - \sqrt{3}).$$

Este último valor es $11\pi/12$ de acuerdo con lo hallado en el Ejemplo 1.30. El ángulo orientado de $\mathcal{L}'$ a $\mathcal{L}$ es el suplemento del anterior, es decir, $\pi/12$.

1.8. Proyección ortogonal sobre una línea recta. Distancia de un punto a una recta.

Comenzamos la seccón con la definición de proyección ortogonal de un punto sobre una línea recta. Está basada en el hecho de que dada una recta $\mathcal{L}$ y un punto U del plano, hay una única recta que pasa por U y es perpendicualar a $\mathcal{L}$.

Definición 1.20. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta y U un punto del plano. Definimos la *proyección ortogonal de* U *sobre* $\mathcal{L}$, denotada por $\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U)$, como el punto de intersección de $\mathcal{L}$ con la línea recta que pasa por U y es perpendicular a $\mathcal{L}$ (ver Figura 37).

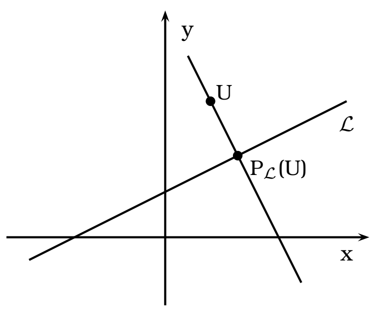

Figura 37

A continuación desarrollamos una fórmula que nos permite calcular con relativa facilidad la proyección ortogonal de un punto sobre una recta.

Teorema 1.10. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta con ecuación general $ax + by + c = 0$ y sea U un punto del plano. Entonces la proyección ortogonal de U sobre $\mathcal{L}$

está dada por la ecuación

$$\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = \frac{1}{\|D\|^2}\big[(D \cdot U)D - cN\big] = \frac{D \cdot U}{\|D\|^2}D + \frac{-c}{\|N\|^2}N, \tag{1.17}$$

donde $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ son, respectivamente, los vectores normal y director de $\mathcal{L}$ dados por la ecuación general.

Prueba. La recta recta $\mathcal{L}'$ que pasa por U y es perpendicular a $\mathcal{L}$ tiene como vector director N y como vector normal D ya que estos vectores son, respectivamente, los vectores normal y director de $\mathcal{L}$. Por consiguiente, si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = \mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U)$, este punto verifica las ecuaciones normales de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, a saber

$$N \cdot X = -c \qquad \text{y} \qquad D \cdot X = D \cdot U. \tag{1.18}$$

Ahora resolvermos este sistema para las componentes x y y del vector X. Multipliquemos la primera de las ecuaciones (1.18) por a y la segunda por $-b$, y sumemos los resultados. Así,

$$\begin{aligned}
-ac + (-b)(D \cdot U) &= a(N \cdot X) + (-b)(D \cdot X) \\
&= (aN - bD) \cdot X \\
&= \left(a \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right) \cdot X \\
&= \left(\begin{pmatrix} a^2 \\ ab \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 \\ -ab \end{pmatrix} \right) \cdot X \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot X \\
&= \begin{pmatrix} \|D\|^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \|D\|^2 x,$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{1}{\|D\|^2}\Big((-b)(D\cdot U) - ac\Big). \tag{1.19}$$

Análogamente, multiplicamos la primera de las ecuaciones (1.18) por b y la segunda por a, sumamos los resultados y procedemos de manera similar para hallar el valor de la componente y; llegamos al resultado

$$y = \frac{1}{\|D\|^2}\Big(a(D\cdot U) - bc\Big). \tag{1.20}$$

Finalmente, las ecuaciones 1.19 y 1.20 son equivalentes a las ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) &= \frac{1}{\|D\|^2}\begin{pmatrix}(-b)(D\cdot U) - ac\\ a(D\cdot U) - bc\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\|D\|^2}\left(\begin{pmatrix}(-b)(D\cdot U)\\ a(D\cdot U)\end{pmatrix} - c\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{\|D\|^2}\left((D\cdot U)\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix} - c\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{\|D\|^2}\Big((D\cdot U)D - cN\Big),
\end{aligned}$$

lo cual prueba la primera igualdad en (1.17). La segunda igualdad en (1.17) se sigue de la primera teniendo en cuenta que $\|N\|^2 = a^2 + b^2 = \|D\|^2$. □

Antes de dar un ejemplo de aplicación de esta fórmula es menester hacer algunos comentarios sobre la misma.

Observación 1.9. 1. La fórmula (1.17) expresa la proyección ortogonal como una combinación lineal de los vectores D y N; y estos vectores están dados de acuerdo con la ecuación general con la que hemos expresado la recta $\mathcal{L}$ (ver Figura 38).

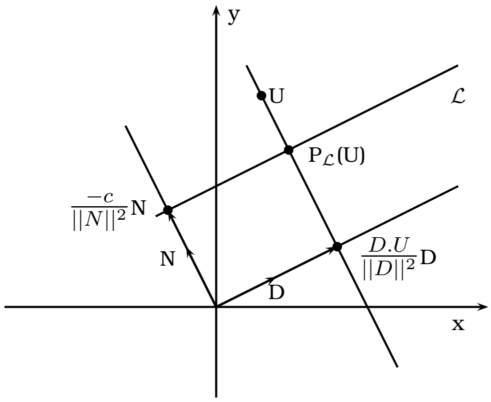

Figura 38

De otra parte, si P es cualquier punto de $\mathcal{L}$ entonces el escalar $-c$ puede escribirse como $N \cdot P$ ya que $N \cdot P + c = 0$; luego, podemos expresar la fórmula (1.17) en términos de un punto conocido de la recta $\mathcal{L}$, así:

$$\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = \frac{D \cdot U}{\|D\|^2} D + \frac{N \cdot P}{\|N\|^2} N. \tag{1.21}$$

2. La fórmula (1.21) para la proyección ortogonal nos permite deducir la invariancia de dicha expresión con respecto a los vectores director y normal utilizados. Más precisamente, D' y N' son también vectores director y normal de $\mathcal{L}$ entonces $D = tD'$ y $N = sN'$ para algunos escalares t y s. Reemplazando T y N en (1.21) tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) &= \frac{D \cdot U}{\|D\|^2} D + \frac{N \cdot P}{\|N\|^2} N \\ &= \frac{(tD') \cdot U}{\|(tD')\|^2}(tD') + \frac{(sN') \cdot P}{\|(sN')\|^2}(sN') \\ &= t\frac{t(D' \cdot U)}{t^2\|D'\|^2} D' + s\frac{s(N' \cdot P)}{s^2\|N'\|^2} N' \\ &= \frac{D' \cdot U}{\|D'\|^2} D' + \frac{N' \cdot P}{\|N'\|^2} N'. \end{aligned}$$

3. En el caso particular $c = 0$, es decir, cuando $\mathcal{L}$ pasa por el origen, la fórmula se reduce a

$$\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = \frac{D \cdot U}{\|D\|^2} D.$$

Esta expresión suele llamarse la *proyección del vector U sobre el vector D* y denotarse por $\mathrm{P}_D(U)$; es, en realidad, la proyección ortogonal del punto U sobre la recta generada por el vector D (ver Figura 39). Por supuesto, no hay nada de especial con el vector D; la proyección de un vector U con respecto a otro vector V es la proyección ortogonal de U sobre la recta generada por V. En particular, la proyección de U sobre el vector N, normal a $\mathcal{L}$, es

$$\mathrm{P}_N(U) = \frac{N \cdot U}{\|N\|^2} N.$$

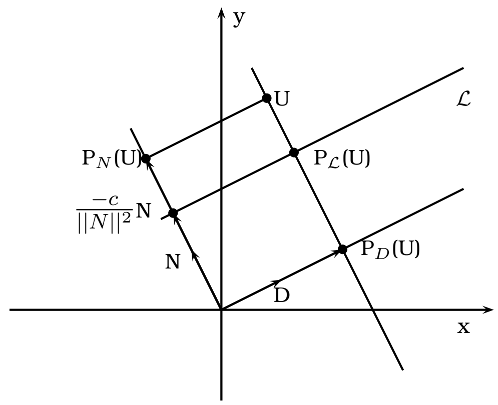

Figura 39

4. La observación del anterior numeral y la fórmula (1.21), nos permiten escribir la proyección ortogonal de U sobre $\mathcal{L}$ como

$$\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = \mathrm{P}_D(U) + \mathrm{P}_N(P), \tag{1.22}$$

donde D y N son, respectivamente, vectores director y normal cualesquiera de la recta $\mathcal{L}$, y P es un punto arbitrario perteneciente a ella.

5. Todos los puntos de la línea recta que pasa por U y es perpendicular a $\mathcal{L}$ se proyectan ortogonalmente sobre el mismo punto, y si el punto U está sobre la recta $\mathcal{L}$ entonces $\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = U$; en este caso $N \cdot U + c = 0$ y por

lo tanto,

$$U = \frac{1}{\|D\|^2}\Big[(D \cdot U)U + (N \cdot U)N\Big] = \frac{D \cdot U}{\|D\|^2}U + \frac{N \cdot U}{\|N\|^2}N = \mathrm{P}_D(U) + \mathrm{P}_N(U).$$

6. Si U es ortogonal a D, $D \cdot U = 0$ y por lo tanto,

$$\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = \frac{-c}{\|D\|^2}N = \frac{-c}{\|N\|^2}N.$$

Ejemplo 1.32. Hallemos de dos maneras la proyección ortogonal del punto $U = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ sobre la recta $\mathcal{L}$ con ecuación general $2x + y + 1 = 0$, primero, directamente de la definición, y después haciendo uso de la fórmula (1.17). Los vectores director y normal a $\mathcal{L}$ que nos proporciona la ecuación general son, respectivamente, $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego, la recta $\mathcal{L}'$ que pasa por U y es perpendicular a $\mathcal{L}$ tiene por ecuación normal

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = 0,$$

y por ecuación general

$$-x + 2y - (-5 + 18) = 0 \iff x - 2y + 13 = 0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$2x + y + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x - 2y + 13 = 0$$

obtenemos la proyección ortogonal de U sobre $\mathcal{L}$, a saber, $\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

De otra parte, $D \cdot U = (-1) \cdot (5) + 2 \cdot 9 = -5 + 18 = 13$. Luego, por la fórmula (1.17),

$$\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = \frac{1}{(-1)^2 + 2^2}\left[13\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -13 - 2 \\ 26 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.14. Sean A y B dos vectores no nulos ortogonales. Pruebe que cualquiera sea el vector X del plano, $X = \mathrm{P}_A(X) + \mathrm{P}_B(X)$.

Finalizamos la sección con una fórmula que nos permite calcular la distancia de un punto a una línea recta.

Definición 1.21. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta y sea U un punto del plano. Definimos la distancia de U a $\mathcal{L}$, denotada por dist$(P, \mathcal{L})$, como la distancia entre U y la proyección ortogonal de U a $\mathcal{L}$; es decir,

$$\text{dist}(U, \mathcal{L}) = \|U - \mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U)\|. \tag{1.23}$$

Teorema 1.11. Sea $\mathcal{L}$ una línea recta con ecuación general $ax + by + c = 0$, y sea $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Entonces

$$\text{dist}(U, \mathcal{L}) = \frac{|au + bv + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{1.24}$$

Prueba. Por el Ejercicio 1.14, $U = \mathrm{P}_D(U) + \mathrm{P}_N(U)$ donde $D = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Sea P el punto de intersección de $\mathcal{L}$ con la recta generada por N. Entonces, por (1.21), $\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = \mathrm{P}_D(U) + \mathrm{P}_N(P)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|U - \mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U)\| &= \|\mathrm{P}_D(U) + \mathrm{P}_N(U) - (\mathrm{P}_D(U) + \mathrm{P}_N(P))\| \\
&= \|\mathrm{P}_N(U) - \mathrm{P}_N(P)\| \\
&= \left\| \frac{N \cdot U}{\|N\|^2} N - \frac{N \cdot P}{\|N\|^2} N \right\| \\
&= \left\| \frac{N \cdot U - N \cdot P}{\|N\|^2} N \right\| \\
&= \frac{|N \cdot U - N \cdot P|}{\|N\|^2} \|N\| \\
&= \frac{|au + bv + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \square
\end{aligned}$$

1.9. Segmento de recta dirigido.

En esta sección precisaremos la noción de segmento de recta dirigido al cual, con frecuencia, también se le denomina «vector».

Definición 1.22. Sean P y Q dos puntos distintos del plano. El *segmento de recta dirigido* de P a Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$, es el conjunto

$$\overrightarrow{PQ} = \Big\{X \in \mathbb{R}^2 : X = P+t(Q-P), t \in [0,1]\Big\} = \Big\{X \in \mathbb{R}^2 : X = (1-t)P+tQ, t \in [0,1]\Big\}.$$

La palabra «dirigido» en esta definición se refiere a que recorremos la recta determinada por P y Q desde el punto P hacia el punto Q, a medida que el parámetro t aumenta desde 0 hasta 1; gráficamente, dibujamos el segmento dirigido $\overrightarrow{OX}$ como una flecha con punto inicial P y punto final Q. (Ver Figura 40).

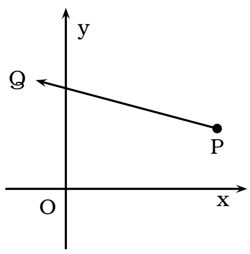

Figura 40

El segmento de recta dirigido de Q a P es entonces

$$\overrightarrow{QP} = \Big\{X \in \mathbb{R}^2 : X = Q + t(P - Q), t \in [0,1]\Big\}.$$

Como conjuntos, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ son iguales pero han sido recorridos de forma diferente. Cuando el sentido del recorrido del conjunto no es relevante, simplemente hablamos del *segmento de recta* $\overline{PQ}$. El segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es entonces una *parametrización* del conjunto $\overline{PQ}$ donde el parámetro es t, así como la recta dirigida es una parametrización de la línea recta.

Nota 1.1. Cuando no haya lugar a confusión diremos, por simplicidad, «segmento» en lugar de «segmento de recta».

Notemos que la distancia entre el punto P y cualquier punto X del segmento $\overline{PQ}$ es

$$\text{dist}(X, P) = \|X - P\| = \|(P + t(Q - P)) - P\| = \|t(Q - P)\| = t\|Q - P\|,$$

y entre los puntos X y Q,

$$\begin{aligned}\text{dist}(X, Q) = \|X - Q\| &= \|(1-t)P + tQ - Q\| = \|(1-t)P - (1-t)Q\| \\ &= \|(1-t)(P - Q)\| = |1-t|\|P - Q\| \\ &= (1-t)\|Q - P\|.\end{aligned}$$

En particular, cuanto $t = 1$ obtenemos la distancia entre los puntos P y Q, que, por definición, es la *longitud* o *magnitud* del segmento $\overrightarrow{PQ}$, denotada por $\|\overrightarrow{PQ}\|$, y si $t = 1/2$ obtenemos el llamado *punto medio* del segmento, a saber, $M = \frac{1}{2}(P + Q)$.

Observación 1.10. La razón entre las distancias $\text{dist}(X, P)$ y $\text{dist}(X, Q)$ es

$$\frac{\text{dist}(X, P)}{\text{dist}(X, Q)} = \frac{t\|Q - P\|}{(1-t)\|Q - P\|} = \frac{t}{1-t}.$$

Cuando este cociente es un número racional lo escribimos en la forma $\frac{t}{1-t} = \frac{m}{n}$; así, $t = \frac{m}{m+n}$, y por lo tanto,

$$X = \frac{n}{m+n}P + \frac{m}{m+n}Q. \tag{1.25}$$

Aplicación 1.1. Una bonita aplicación del concepto de segmento dirigido es la que nos permite probar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto, y localizar dicho punto en el plano cartesiano. Las *medianas* del triángulo son los segmentos de recta desde cada vértice al punto medio del lado opuesto. Si A, B y C son los vértices de un triángulo, $\triangle ABC$, y R, S y T son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, entonces las medianas de $\triangle ABC$ son los segmentos $\overline{CR}$, $\overline{AS}$ y $\overline{BT}$ (ver Figura 41).

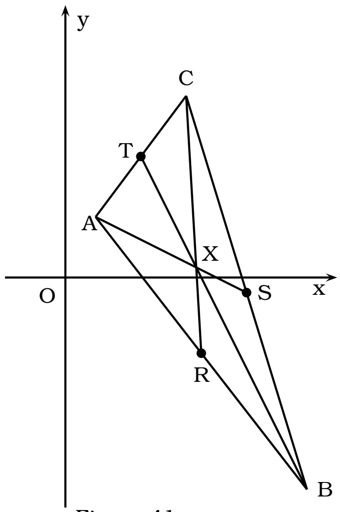

Figura 41

Notemos que $R = \dfrac{1}{2}(A + B)$. Si X es el punto del segmento dirigido $\overrightarrow{RC}$ tal que su distancia al punto C es el doble de su distancia al punto R, entonces usamos (1.25) con $P = R$, $Q = C$, $m = 1$ y $n = 2$: luego,

$$X = \frac{2}{3}R + \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(A+B)\right] + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}(A+B+C). \qquad (1.26)$$

El lado derecho de la ecuación (1.26) sólo depende de los vértices del triángulo, y no de la mediana $\overline{CR}$. Es decir, obtenemos el mismo punto, $\dfrac{1}{3}(A + B + C)$, si razonamos con la mediana $\overline{AS}$ o con la mediana $\overline{BT}$. Por lo tanto las tres medianas se cortan en el punto X dado por (1.26). Este punto es llamado el *baricentro* del triángulo.

Así como hemos definido la magnitud de un segmento dirigido, podemos también definir su dirección.

Definición 1.23. Sea $\overrightarrow{PQ}$ un segmento dirigido. Definimos la *dirección* de $\overrightarrow{PQ}$, denotada por dir$(\overrightarrow{PQ})$, como

$$\text{dir}(\overrightarrow{PQ}) = \text{dir}(Q - P). \tag{1.27}$$

Observación 1.11. De nuestras definiciones podemos observar que, cualquiera sea el punto X, $\|\overrightarrow{OX}\| = \|X\|$ y dir$(\overrightarrow{OX}) =$ dir(X); aunque la representación gráfica del vector X coincide con la del segmento dirigido $\overrightarrow{OX}$, debemos recalcar que X es un punto del plano cartesiano mientras que $\overrightarrow{OX}$ es un segmento de recta. Esta similitud entre X y $\overrightarrow{OX}$ sugiere definir otras nociones geométricas y algebraicas para segmentos dirigidos.

Definición 1.24. Sean $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ segmentos dirigidos desde el punto P. Definimos el *ángulo* entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, denotado por $\measuredangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$, como

$$\measuredangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \measuredangle(\overrightarrow{Q - P}, \overrightarrow{R - P}). \tag{1.28}$$

Notemos que $\measuredangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$=$\measuredangle(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$. Las definiciones tienen un sentido geométrico muy claro, como se aprecia en la Figura 42.

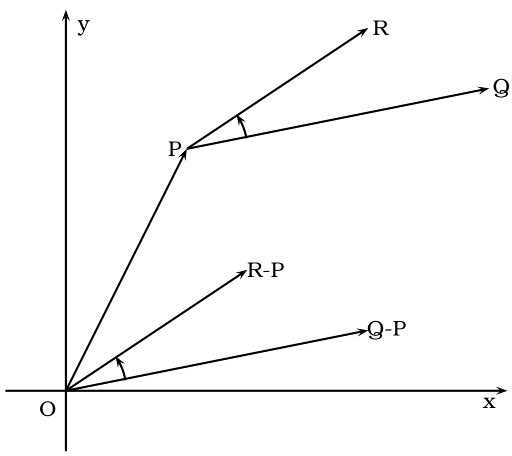

Figura 42

El triángulo con vértices P, Q y R se traslada paralelamente a si mismo desde el punto P usando como guía el segmento $\overline{OP}$, hasta que el punto P coincida con el origen; entonces, los puntos Q y R quedan superpuestos a los puntos $Q-P$ y $R-P$, respectivamente.

Ejemplo 1.33. Si $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ -2 \end{pmatrix}$ entonces $Q - P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $R - P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego

$$\measuredangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \measuredangle\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}.$$

Podemos sumar segmentos dirigidos que parten de un mismo punto, multiplicarlos por un escalar e, inclusive, hacer el producto punto entre ellos. La idea es siempre la misma: utilizar los puntos final e inicial de la flecha para definir tales operaciones. Sin embargo estas operaciones no son necesarias en nuestro curso de Geometría Analítica y por eso no profundizaremos en el tema. Sólo diremos que la idea de considerar segmentos dirigidos conduce al concepto de «vector libre» que es útil en Física. Más exactamente, dos segmentos dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ se consideran *equivalentes*, y escribimos $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$ si y sólo si $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR}\|$ y $\mathrm{dir}(\overrightarrow{PQ}) = \mathrm{dir}(\overrightarrow{RS})$. Esta noción de equivalencia nos permite agrupar los segmentos dirigidos en conjuntos disjuntos, cada uno de los cuales se llama *clase de equivalencia*, y un segmento dirigido perteneciente a una clase de equivalencia se llama *representante de la clase*. Para las clases de equivalencia podemos definir operaciones algebraicas cuyo resultado es independiente del representante de la clase.