Catálogo

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 1 2019-01

1. Para un condicional $p \Longrightarrow q$ la implicación recíproca (en inglés: converse) es $q \Longrightarrow p$ y la implicación contrarecíproca (en inglés: contrapositive) es $\neg q \Longrightarrow \neg p$. Para las proposiciones siguientes escriba las recíprocas y las contrarecíprocas:
   (a) Si estás cansada, duerme una siesta.
   (b) Si estoy preocupado, no duermo bien.
   (c) Si $x^2 - 4x + 4 = 0$ entonces $x = 4$.
   (d) Si $-1 < x < 1$, entonces $x^4 < x^2$.
2. Para cada proposición exhiba su tabla de verdad:
   (a) $(H \Longrightarrow G) \Longrightarrow (F \wedge G)$
   (b) $(F \vee \neg H) \Longrightarrow (G \Leftrightarrow \neg F)$
   (c) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$
   (d) $P \Longrightarrow (Q \vee \neg Q)$
   (e) $(P \wedge R) \vee \neg (Q \wedge S)$
   (f) $(P \Longrightarrow R) \vee \neg (Q \Leftrightarrow S)$
3. Determine el número de filas de la tabla de verdad para
$$(P \wedge Q) \Longrightarrow (((\neg P) \vee R) \Leftrightarrow (R \Longrightarrow S))\,.$$
4. Determine por medio de tablas de verdad si las siguientes parejas de proposiciones son lógicamente equivalentes o sea si tienen los mismos valores de verdad para cada combinación de valores de verdad de las proposiciones involucradas.
   (a) $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$ y $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C$
   (b) $C \Longrightarrow (A \vee B)$ y $(C \Longrightarrow A) \vee (C \Longrightarrow B)$
   (c) $C \Longrightarrow (A \wedge B)$ y $(C \Longrightarrow A) \wedge (C \Longrightarrow B)$
   (d) $(A \vee B) \Longrightarrow C$ y $(A \Longrightarrow C) \wedge (B \Longrightarrow C)$
   (e) $(A \wedge B) \Longrightarrow C$ y $(A \Longrightarrow C) \wedge (B \Longrightarrow C)$
5. Verifique que las siguientes proposiciones son tautologías
   (a) $s \Longrightarrow \neg\neg s$
   (b) $(\neg\neg w) \Longrightarrow w$
   (c) $r \Longrightarrow (u \Longrightarrow r)$
   (d) $(R \Longrightarrow (S \Longrightarrow T)) \Longrightarrow (S \Longrightarrow (R \Longrightarrow T))$
6. En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ determine el valor de verdad de las siguientes expresiones:
   (a) Para todo x se cumple $x = x^2$.
   (b) Existe x tal que $x = x^2$.
   (c) Para todo x se cumple $2x = x^2$.
   (d) Existe x tal que $2x = x^2$.
   (e) Para todo x si x es par entonces x^2 es par.
7. Sea $P(x)$ el predicado $x > \dfrac{1}{x}$.
   (a) Escriba $P(3), P(1/3), P(-1/2), P(-9)$ e indique cuáles son verdaderos y cuáles son falsos.
   (b) Si el conjunto de referencia es $\mathbb{R}$, en qué subconjunto de $\mathbb{R}$ es verdadero $P(x)$?
   (c) Responda la pregunta anterior suponiendo que el conjunto de referencia es $\mathbb{R}^+$.

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 2 2019-01

1. Demuestre las siguientes afirmaciones sobre números enteros.
   (a) Si n es un entero, entonces $2n + 5$ es un entero impar.
   (b) Si k es impar y m es par, entonces $k^2 + m^2$ es impar.
   (c) Si n es impar, entonces $(-1)^n = -1$.

2. Determine la verdad o falsedad de cada enunciado sobre números enteros. En el primer caso debe proporcionar una demostración y en el segundo caso, encontrar un contraejemplo.
   (a) El producto de dos enteros impares es impar.
   (b) La diferencia entre cualquier par de números enteros impares es par.
   (c) Si la suma de dos números enteros es un número par, entonces al menos uno de los enteros de la suma es par.
   (d) Si $n - m$ es par, entonces $n^3 - m^3$ es par.
   (e) Para todo entero n, si n es primo entonces $(-1)^n = -1$.
   (f) Para todo entero m, si $m > 2$ entonces $m^2 - 4$ es un número compuesto.
   (g) Si m y n son positivos y mn es un cuadrado perfecto, entonces tanto m como n son cuadrados perfectos.
   (h) La diferencia de los cuadrados de cualquier par de números enteros consecutivos es impar.

3. Responda las siguientes preguntas sobre números enteros. Explique cada respuesta.
   (a) ¿Es verdad que $17|51$?
   (b) ¿Es verdad que $6m(2m + 10)$ es divisible por 4?
   (c) Si $n = 4k + 3$, ¿será cierto que $8|(n^2 - 1)$?

4. Dos atletas corren en una pista atlética con velocidades constantes. La primera atleta completa cada vuelta en 8 minutos y la segunda la completa en 10 minutos. Si las atletas empiezan a correr a las 4 p.m., ¿a qué hora se encuentran en el punto de partida por primera vez?

5. Encuentre la factorización única de 5733.

6. Encuentre el menor entero positivo n tal que $2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot n$ es un cuadrado perfecto.

7. ¿Cuántos ceros hay al final del número $45^8 \cdot 88^5$?
   Sugerencia: $10 = 5 \cdot 2$.

8. Escriba 20! como producto de potencias de números primos en orden creciente.

9. Sea n un entero no negativo. Demuestre que si la suma de los dígitos de n es divisible por 3, entonces n es divisible por 3.

10. Para cada pareja de enteros n y d, encuentre enteros q y r tales que $n = qd + r$ y $0 \leq r < d$. a. $n = 62, d = 7$. b. $n = -45, d = 11$. c. $n = -27, d = 8$.

11. Demuestre que el producto de cualquier par de enteros consecutivos es un número par.

12. Demuestre que para todo entero n se cumple que $n^2 - n + 3$ es impar.

13. Sea b un entero. Si $b \mod 12 = 5$, encuentre $8b \mod 12$.

14. Sea b un entero. Si $b \mod 15 = 3$, encuentre $10b \mod 15$.

15. Demuestre que para cualquier entero n, si $n \mod 5 = 3$ entonces $n^2 \mod 5 = 4$.

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 3 2019-01

1. Derivaciones

   (a) $P \Rightarrow Q$
   $\neg R \Rightarrow (T \Rightarrow S)$
   $R \vee (P \vee T)$
   $\neg R$

   $Q \vee S$

   (b) $P \Rightarrow Q$
   $P \Rightarrow \neg Q$

   $\neg P$

   (c) P

   $P \wedge (P \vee Q)$

   (d) Hay un conjunto de referencia llamado U. Las proposiciones R, C y T se refieren a elementos de U.
   $\forall x \in U \quad R(x) \Rightarrow C(x)$
   $\forall x \in U \quad T(x) \Rightarrow R(x)$

   $\forall x \in U \quad \neg C(x) \Rightarrow \neg T(x)$

2. Cuantificadores

   (a) Decida cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas y cuáles son falsas. Si una proposición es falsa, proporcione un contraejemplo.

      i. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x^2 + 3x + 2 \geq 0.$
      ii. $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad x^2 + 3x + 2 \geq 0.$
      iii. $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad x^2 + 3x + 2 \geq 0.$
      iv. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 3x + 2 \geq 0.$

   (b) Decida cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas y cuáles son falsas.

      i. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad \exists y \in \mathbb{N}$ tal que $x \geq y$.
      ii. $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists y \in \mathbb{Z}$ tal que $x \geq y$.
      iii. $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \exists y \in \mathbb{Q}$ tal que $x \geq y$.
      iv. $\exists x \in \mathbb{N}$ tal que $\forall y \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq y$.
      v. $\exists x \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall y \in \mathbb{Z}$ tal que $x \leq y$.

   (c) En cada expresión de abajo, decida cuál pareja de cuantificadores (o ambas o ninguna)
   $\forall s \in \mathbb{R}, \quad \exists t \in \mathbb{R}$ tal que
   $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $\forall s \in \mathbb{R}$
   hace que la expresión sea una proposición verdadera.

      i. $s + t = s^2$.
      ii. $s^2 = t$.
      iii. $t^2 = s$.
      iv. $st = 0$

3. Para los enteros dados m y d, escriba m como $qd + r$ con $0 \leq r < d$.
   a. $m = 20, \quad d = 3$ b. $m = -16, \quad d = 3$ c. $m = 64, \quad d = 37$.

4. Escriba cada uno de los enteros siguientes como producto de potencias de primos.
   a. 828 b. 1781 c. 107.

5. Utilice el teorema del cociente-residuo con $d = 3$ para demostrar que el producto de cualesquiera tres enteros consecutivos es divisible por 3.

6. Utilice el teorema del cociente-residuo con $d = 3$ para demostrar que el cuadrado de cualquier entero tiene una de estas formas: $3k$ o $3k + 1$.

7. Demuestre que para cualquier par de enteros a y b, si $a \mod 7 = 5$ y $b \mod 7 = 6$, entonces $ab \mod 7 = 2$.

8. Si en este momento son las 4 a.m., ¿qué hora será dentro de 101 horas? Sugerencia: Trabaje módulo 12.

9. Demuestre que para todo par de reales r y s, $|r||s| = |rs|$.

10. Demuestre que para todo par de reales r y s con la condición $s \geq 0$, se cumple:

    (a) Si $-s \leq r \leq s$, entonces $|r| \leq s$.

    (b) Si $|r| \leq s$ entonces $-s \leq r \leq s$.

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 4 2019-01

1. Determine la verdad o falsedad de las siguientes igualdades. En el primer caso debe demostrar el resultado y en el segundo, proporcionar un contraejemplo. El conjunto de referencia es el de los números reales.

   (a) $\lceil x+8 \rceil = \lceil x \rceil + 8$.

   (b) $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$.

   (c) $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

   (d) $\lceil xy \rceil = \lceil x \rceil \lfloor y \rfloor$.

2. Demuestre que si n es un entero impar, entonces
$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

3. Demuestre que si n es un entero impar, entonces
$$\left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil = \frac{n^2+3}{4}.$$

4. Encuentre un valor de x para el cual $\lceil 2x \rceil = 2\lceil x \rceil - 1$.

5. Demuestre que para todo real x,
$$2\lceil x \rceil - 1 \leq \lceil 2x \rceil \leq 2\lceil x \rceil.$$

6. Utilice las funciones piso y techo para expresar:

   (a) $243 \mod 11$ y 243 div 11.

   (b) $243 \mod 9$ y 243 div 9.

7. Demuestre que si x es un real no entero entonces $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

8. Demuestre que si x es un real y $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$, entonces $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

9. Demuestre que si x es un real y $x - \lfloor x \rfloor \geq \frac{1}{2}$, entonces $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 5 2019-01

1. ¿Cuáles son los valores para las siguientes sumas?

   (a) $\sum_{i=1}^{6}(i+1)$.

   (b) $\sum_{i=1}^{6} 4$.

   (c) $\sum_{j=0}^{6}(2^{j+1}-2^{j})$.

   (d) $\sum_{j=0}^{6}(-2)^{j}$.

   (e) $\sum_{j=0}^{6} j!$

2. ¿Cuáles son los valores de los siguientes productos?

   (a) $\prod_{i=0}^{10} i$.

   (b) $\prod_{i=5}^{10} i$.

   (c) $\prod_{i=1}^{100}(-1)^{i}$.

   (d) $\prod_{i=1}^{10} 4$.

   (e) $\prod_{j=0}^{4} j!$

   (f) $\prod_{j=2}^{6} j!$

3. Sea x la sucesión definida por

$$x_1 = 2, \qquad x_n = 3 + x_{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

   Halle una fórmula para la sucesión c definida por

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

4. Sea u la sucesión definida por

$$u_1 = 3, \qquad u_n = 3 + u_{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

   Halle una fórmula para la sucesión c definida por

$$c_n = \prod_{i=1}^{n} u_i.$$

5. Para la sucesión r definida por

$$r_n = 3 \cdot 2^n - 4 \cdot 5^n, \qquad n \geq 0,$$

   pruebe que $\{r_n\}$ satisface

$$r_n = 7 \cdot r_{n-1} - 10 \cdot r_{n-2}, \qquad n \geq 2.$$

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 6 2019-01

Prinicipio de inducción matemática

1. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n\,(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \qquad$ para todo $n \geq 1$;
2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}, \qquad$ para todo $n \geq 1$;
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$
4. $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1\right), \qquad$ para toda $\dot{a} > 0, \qquad n \geq 1$;
5. Para todo entero positivo n, el número $n^4 - 4n^2$ es divisible por 3.
6. Para todo entero $n \geq 2$,
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$$
7. Pruebe que el cubo de cualquier entero positivo puede ser escrito como la diferencia de dos cuadrados.
(**Ayuda**: Note que $n^3 = \left(1^3 + 2^3 + + \cdots + n^3\right) - \left(1^3 + 2^3 + + \cdots + (n-1)^3\right)$.)
8. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $8^n - 3^n$ es divisible por 5.
9. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 5$, entonces $4^n > n^4$.
10. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $1 + 2n \leq 3^n$.
11. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 4$, entonces $3^n > n^3$.
12. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 6$, entonces $7n < 2^n$.
13. Observe que
$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1-4 &= -(1+2), \\ 1-4+9 &= 1+2+3, \\ 1-4+9-16 &= -(1+2+3+4). \end{aligned}$$
Induzca una ley general y demuéstrela por inducción.
14. Sea $A(n)$ la proposición: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$.
   a.) Pruebe que si $A(k)$ es cierta para un entero k, $A(k+1)$ también es cierta.
   b.) Critique la conclusión "de la inducción se sigue que $A(n)$ es cierta para todo n."
15. Sea b un entero positivo. Demuestre por inducción la proposición: *Para cada entero $n \geq 0$ existen enteros no negativos q y r tales que:*
$n = qb + r, \qquad 0 \leq r < b.$

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2

Taller 7 2019-01

1. Liste los elementos de los siguientes conjuntos o indique si alguno de ellos es vacío.
   (a) $\{x|x \in \mathbb{N} \quad \text{y } x^2 < 36\}$
   (b) $\{x|x = y + 5 \quad \text{para } y \in \{0, 2, 4, 7, 9\}\}$
   (c) $\{x|x \in \mathbb{R} \quad \text{y } x^2 = -1\}$
   (d) $\{x|x \in \mathbb{Z} \quad \text{y } |x| \leq 7\}$
2. Para los conjuntos
   $$R = \{1, 3, \pi, 4.1, 9, 10\}, \quad S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}, \quad T = \{1, 3, \pi\} \quad \text{y } U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$$
   ¿cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?
   (a) $S \subset R$
   (b) $1 \in S$
   (c) $\{1\} \subset T$
   (d) $\{1\} \subset S$
   (e) $S \subset \{1, 3, 9, 10\}$
3. En un estudio con 260 estudiantes de una universidad se obtuvieron los siguientes datos: 64 están matriculados en un curso de matemáticas, 94 están en un curso de ciencias de la computación y 58 en un curso de administración. Además se encontró que 28 están en los cursos de matemáticas y computación, 26 en los de matemáticas y administración, 22 en computación y administración y 14 en los tres cursos.
   (a) ¿Cuántos de los estudiantes consultados no tienen matriculados ninguno de los tres cursos?
   (b) ¿Cuántos de los estudiantes consultados tienen matriculado el curso de ciencias de la computación y no tienen matriculados los otros dos cursos?
4. Si S es un conjunto finito denotamos $|S|$ a su número de elementos. Sean A, B y C conjuntos finitos.
   (a) Pruebe la fórmula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
   (b) Pruebe que $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
   Sugerencia: $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5. Suponga que $A \cap B = A \cap C$. ¿Puede concluir que $B = C$?
6. Suponga que $A \cup B = A \cup C$. ¿Puede concluir que $B = C$?
7. ¿Cuándo se cumple que $A - B = B - A$?
8. Sea $R_j = \{x \in \mathbb{R}|1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{j}\} = [1, 1 + \frac{1}{j}]$ para todo número natural j. Encuentre:
   (a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} R_i$
   (b) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4} R_i$
   (c) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} R_i$
   (d) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} R_i$
   (e) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$
   (f) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 8 2019-01

1. Bloch sección 4.1: 3, 4, 5, 6.

2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, \pi, e\}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones de A a B?

   (a) $f = \{(1, \pi), (3, \pi), (4, \pi), (2, e)\}$
   (b) $g = \{(1, e), (2, e), (3, \pi), (2, e), (4, 2)\}$
   (c) $h = \{(1, 2), (2, 2), (3, \pi), (4, 2), (1, \pi)\}$
   (d) $j = \{(2, \pi), (3, e)\}$

3. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Demuestre que el producto cartesiano $A \times B$ es una función si y solo si el conjunto B tiene solamente un elemento.

4. Para funciones cuyos dominios son conjuntos de números reales se acostumbra usar una fórmula para describir la función y se sobreentiende que el dominio es el conjunto de todos los números reales para los que la fórmula da un único número real, a no ser que se hayan puesto restricciones adicionales. Por ejemplo, las funciones

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-2)(x+5)} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x+8}$$

   tienen dominios $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$ y $[-8, \infty)$ respectivamente.
   Adicionalmente, $\sqrt{w}$ es el número real no negativo cuyo cuadrado es w.
   En los siguientes casos determine el dominio de las funciones f y g y determine si son o no son iguales.

   (a) $f(x) = 1 \qquad g(x) = \dfrac{x-5}{x-5}$
   (b) $f(x) = |x| \qquad g(x) = \sqrt{x^2}$
   (c) $f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = \sqrt{|x|}$

5. Debido a que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in dom(f)$, la definición de composición requiere que $f(x) \in dom(g)$ para todo $x \in dom(f)$. Por consiguiente, aunque no se exprese de forma explícita, el dominio de $g \circ f$ es el conjunto de los $x \in dom(f)$ para los cuales tiene sentido $g(f(x))$.
   Encuentre el dominio de $g \circ f$ en cada caso.

   (a) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{x}$
   (b) $f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2$
   (c) $f(x) = \sin(x) \qquad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 9 2019-01 Funciones
Ejercicios tomados de los libros de Epp y Bloch

1. En cada caso determine si la función es inyectiva.

   (a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ para todo número real no nulo.

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ para todo número real.

   (c) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x}$ para todo número real no nulo.

   (d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ para todo número real distinto de 1.

2. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ asi: $f(n, m) = 3^n 5^m$. Demuestre que f es uno a uno.

3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones inyectivas, tendrá que ser necesariamente que $f + g$ es inyectiva?

4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones sobreyectivas, tendrá que ser necesariamente que $f + g$ es sobreyectiva?

5. Sean X, Y conjuntos y sea $f : X \to Y$ una función inyectiva. Si $S \subset X$, demuestre que $f^{-1}(f(S)) = S$. ¿Qué pasa si se retira la inyectividad de la hipótesis?

6. Sean X, Y conjuntos y sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Si $T \subset Y$, demuestre que $f(f^{-1}(T)) = T$. ¿Qué pasa si se retira la sobreyectividad de la hipótesis?

7. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas asi: $f(x) = x^3$ y $g(x) = x - 1$. Calcule $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Son iguales?

8. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas asi: $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^{1/5}$. Calcule $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Son iguales?

9. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas asi: $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^{1/2}$. Calcule $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Son iguales?

10. Sean X, Y, Z conjuntos y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Suponga que ambas son 1-1 y sobre. Demuestre que $(g \circ f)^{-1}$ existe y es $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

11. Demuestre la siguiente variación menor del Teorema 4.2.4 de Bloch:

    Teorema
    Sean A, B conjuntos, $C, D \subset A$, $\quad S, T \subset B$ subconjuntos y sean $f : A \to B$ una función, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de A y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de B. Entonces:

    (a) $f(\Phi) = \Phi$.

    (b) $f^{-1}(B) = A$.

    (c) $f(C) \subset S$ si y solo si $C \subset f^{-1}(S)$.

    (d) Si $C \subset D$ entonces $f(C) \subset f(D)$.

    (e) Si $S \subset T$ entonces $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$.

    (f) $f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(U_n)$.

    (g) $f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(U_n)$.

    (h) $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(V_n)$.

    (i) $f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(V_n)$.

Fundamentos de Matemáticas 3010334-2
Taller 10 2019-01 Relaciones

- Bloch sección 5.1: 1, 3, 8.
- Bloch sección 5.2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

Sea A un conjunto. Una relación R en A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$. En ocasiones, en lugar de $(x, y) \in R$ se escribe xRy.

Sean A, B conjuntos. Una relación S de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. En este caso también se usa escribir xSy en lugar de $(x, y) \in S$.

Dada S relación de A en B, la relación inversa de S, denotada S^{-1} se define asi:

$$S^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in S\}.$$

Definiciones

1. Decimos que R es reflexiva si para todo $x \in A$, xRx.
2. Decimos que R es simétrica si siempre que xRy se cumple que yRx.
3. Decimos que R es antisimétrica si siempre que xRy y yRx se cumple $x = y$.
4. Decimos que R es transitiva si siempre que xRy y yRz se cumple xRz.
5. Decimos que R es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.
6. El conjunto $[x] = \{z \in A \mid (x, z) \in R\}$ se denomina la clase de x según la relación R.
7. Si R es una relación de equivalencia, a la clase $[x]$ se le denomina clase de equivalencia.

Cuestionario

1. La relación en $\mathbb{Z}$ llamada **Congruencia módulo 3** se denota $\equiv$ y se define asi:
   $n \equiv m \mod 3$ si y solo si $3 \mid (m - n)$.
   (a) Describa las clases $[0]$, $[1]$ y $[2]$ según esta relación.
   (b) ¿Es ésta una relación de equivalencia?
2. Sean $A = \{3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Sea S la relación **divide a**, denotada por la raya vertical $|$, definida de A en B. Por ejemplo, $(3, 6) \in S$, lo cual también podemos escribir $3|6$. Liste los elementos de S y S^{-1}.
3. Para cada relación, estudie si es reflexiva, simétrica o transitiva.
   (a) Relación $\leq$ en $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales.
   (b) Relación D definida en $\mathbb{R}$ de la siguiente forma: xDy si y solo si $xy \geq 0$.
   (c) Relación G definida en $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, de la siguiente forma:
   nGm si y solo si $n - m$ es impar.
4. Sea R una relación en un conjunto A. Establezca la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. A las verdaderas, las demuestra y a las falsas les exhibe un contraejemplo o una razón convincente.
   (a) Si R es reflexiva entonces R^{-1} es reflexiva.
   (b) Si R es simétrica entonces R^{-1} es simétrica.
   (c) Si R es transitiva entonces R^{-1} es transitiva.

5. (a) Pruebe que sólo hay una relación de equivalencia en un conjunto de 1 elemento.
   (b) Pruebe que hay exactamente dos relaciones de equivalencia en un conjunto de 2 elementos.

6. ¿Cuáles de las siguientes relaciones en el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ son relaciones de equivalencia? Si la relación es una relación de equivalencia, indique la partición del conjunto X que genera.

   (a) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1)\}$
   (b) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
   (c) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}$

7. Sean $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos y R la relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $((a,b), (c,d)) \in R$ si y solo si $a \leq c$ y $b \leq d$. Determine si esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva.

8. Sea $X = \{1, 2, ..., 10\}$. Definimos una relación R sobre $X \times X$ de la siguiente manera: $(a, b)R(c, d)$ si y solo si $a + d = b + c$.

   (a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en $X \times X$.
   (b) Liste un miembro de cada clase de equivalencia en $X \times X$.

9. En este ejercicio el conjunto de referencia es $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Encuentre las clases de equivalencia $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$ para las relaciones de equivalencia correspondientes a las siguientes particiones del conjunto A:

   (a) $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
   (b) $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$
   (c) $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$
   (d) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$