Resumen Ecuaciones Diferenciales

Matheo Muñoz Betancur

Universidad Nacional de Colombia

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

1. Parcial 1

1.1. Terminología

1.1.1. Orden de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Por ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (orden 2), la forma normal de una ecuación diferencial se denota de la siguiente forma:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

1.1.2. Linealidad

Se conoce ecuación diferencial lineal a aquella ecuación donde cuyas derivadas de orden n-ésimo (incluyendo la derivada de orden 0 o y) tienen potencia 1, así la forma general es

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Dos casos especiales que se verán en esta primera sección son los de ecuaciones diferenciales de primer orden (n=1) y de segundo orden (n=2) cuyas formas son:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{y} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

1.2. Ecuaciones diferenciales separables

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Se dice que es separable o de variables separables. Para resolverla se deja a un lado la función dependiente de x y al otro la función dependiente de y, junto con los diferenciales de cada una, del siguiente modo

$$\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x$$

Se procede a integrar a ambos lados respecto a cada diferencial

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

Al final, se despeja $y(x)$ si es posible (tener en cuenta la constante de integración) así

$$y(x) = mx + C$$

Nota: A partir de este punto, ecuación diferencial se denotará por las siglas ED.

1.3. ED's lineales de primer orden por factor integrante

Si se tiene una ecuación diferencial lineal de primer orden, es decir de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Cuya normalización está dada por

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Y sean $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$ de tal forma que la ED anterior se puede escribir como

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{1}$$

Se desea obtener una función $u(x)$ tal que

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = (u(x)y)' \tag{2}$$

Se define a $u(x)$ como el factor integrante de la ecuación (1) como sigue:

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Así (2) se convierte en

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] = e^{\int p(x)dx}f(x) \tag{3}$$

Por lo tanto, la solución de la ED se resume en integrar a ambos lados de la ecuación (3).

1.4. ED's de primer orden autónomas

Se denota ecuación diferencial de primer orden autónoma aquellas con la forma $y' = f(y)$. Particularmente para estas no se halla una solución explícita ni implícita, sino que se grafican las soluciones a partir del comportamiento de la ED, para lo cual se siguen los siguientes pasos:

1. Se hallan las raices $f(y) = 0$.
2. Las raices se llaman soluciones de equilibrio (pueden ser estables, inestables y semiestables dependiendo de cómo sea la respectiva gráfica).

3. Se grafica $f(y)$ contra y usando las raíces halladas y el signo que toma $f(y)$, esta gráfica es llamada diagrama de fase. Los puntos críticos de $f(y)$ deberán ser los puntos de inflexión de $y(x)$ (el valor de los puntos se desconoce pero deben de tenerse en cuenta a la hora de hallar concavidad)
4. Con base en la anterior grafica se puede determinar la concavidad de $y(x)$ ya que se conoce el signo de $y''(x) = f(y)f'(y)$
5. Finalmente, se grafican las soluciones de la ecuación utilizando las soluciones de equilibrio (que son asintotas horizontales para $y(x)$), el signo de $f(y)$ para determinar si $y(x)$ es creciente o decreciente y el signo de $y''(x)$ para la concavidad

1.5. ED's homogéneas

Son las ecuaciones de la forma $y'(x) = g\left(\frac{x}{y}\right)$ o $y'(x) = h\left(\frac{y}{x}\right)$. Para resolverlas se emplea alguno de los siguientes cambios de variable

$$v = \frac{y}{x} \quad \vee \quad v = \frac{x}{y}$$

Lo cual permite transformar la ED homogénea en ED de variables separables. **IMPORTANTE** devolver la sustitución.

1.6. ED's exactas y reducibles a exactas

Una ED exacta es aquella que se puede expresar de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

La cual debe cumplir

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

Note que lo que acompaña al dx se deriva parcialmente respecto a y y lo que acompaña al dy se deriva parcialmente respecto a x. Al hacer estas derivadas suceden 2 casos:

Caso 1: Se cumple la igualdad (4).

Existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \tag{5}$$

Por lo tanto, se siguen los siguientes pasos:

1. Integrar alguna de las 2 expresiones anteriores respecto a x o y según corresponda para obtener una expresión de la formaa

$$f(x,y) = F(x,y) + h(y) \quad \vee \quad f(x,y) = F(x,y) + h(x)$$

2. Si la función h depende de x se calcula la derivada parcial de $f(x,y)$ respecto a x, y similarmente para $h(y)$ respecto a y. Igualándola con una de las 2 expresiones en (5) según corresponda.

Caso 2: No se cumple la igualdad (4).

En este caso se busca encontrar un factor integrante para la ED que permita convertirla en exacta para así resolverla como en el caso 1. Para esto debe cumplirse lo siguiente:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = R(x) \quad \vee \quad \frac{N_x - M_y}{M} = R(y) \tag{6}$$

En las ecuaciones (6) los subíndices hacen referencia a la variable respecto a la cual se deriva parcialmente la función, y $R(x)$ significa que el resultado es una función que sólo tiene explícita la variable x, lo mismo para $R(y)$. Así, el factor integrante será (siguiendo el orden según el caso de las ecuaciones en (6)):

$$\mu(x) = e^{\int R(x)dx} \quad \vee \quad \mu(y) = e^{\int R(y)dy}$$

Finalmente se multiplica la ED inicial con el factor integrante.

1.7. ED's dependientes de funciones lineales

- **Caso 1:** ED's de la forma $y' = f(Ax+By+C)$. Para resolver este tipo de ED se emplea la siguiente sustitución:

  $$u = Ax + By + C \Rightarrow u' = A + By'$$

  Así:

  $$y' = \frac{u' - A}{B} = f(u)$$

  La cual ya se puede resolver como ED separable.

- **Caso 2:** ED's de la forma $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$. Para estas ecuaciones se plantea el siguiente sistema:

  $$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ dx + ey + f &= 0 \end{aligned}$$

  Si el punto (x_0, y_0) es solución del sistema anterior se pueden plantear las siguientes sustituciones:

  $$\left.\begin{aligned} x &= z + x_0 \\ y &= w + y_0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{derivando}} \left\{\begin{aligned} dx &= dz \\ dy &= dw \end{aligned}\right.$$

  Así, la ecuación queda escrita como $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dz} = f\left(\frac{az+bw}{dz+ew}\right)$ la cual es homogénea.

1.8. ED's de Bernoulli

Son aquellas de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \xrightarrow{\text{dividiendo en } y^n} y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \tag{7}$$

En estas ecuaciones se hace la sustitución

$$v = y^{1-n} \tag{8}$$

Para lo cual

$$v' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{v'}{1-n} \tag{9}$$

Ahora reemplazando (8) y (9) en (7) se obtiene la ecuación diferencial lineal (la cual se puede resolver con factor integración como se vio en la sección 1.3):

$$\frac{v'}{1-n} + p(x)v = q(x)$$

RECUERDE devolver la sustitución.

1.9. Reducción de orden

La idea fundamental de este método es transformar una ecuación diferencial de segundo orden en una de primer orden para así utilizar alguno de los métodos vistos a lo largo de esta sección.

- **Caso 1:** Cuando la ED es de la forma

  $$y'' = f(x, y') \rightarrow \text{No aparece } y \text{ como argumento en la función } f$$

  Se usa la sustitución
  $$u = y' = \frac{dy}{dx}$$
  De aquí se obtiene
  $$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$
  Finalmente la ED se transforma en
  $$\frac{du}{dx} = f(x, u)$$
  La cual es una ED de primer orden, al resolverla se obtiene $u = u(x)$. Finalmente para encontrar $y(x)$ se resuelve la ED de primer orden

  $$\frac{dy}{dx} = u(x)$$

- **Caso 2:** Cuando la ED es de la forma

  $$y'' = f(y, y') \rightarrow \text{No aparece } x \text{ como argumento en la función } f$$

  Aquí, similar al caso anterior, se hace la sustitución

  $$u = y' = \frac{dy}{dx}$$

  Se sabe que $y'' = u' = \frac{du}{dx}$, por lo que la ED se transforma en

  $$\frac{du}{dx} = f(y, u) \rightarrow \text{Aparecen 3 variables: } u,\ y,\ x.$$

  Por lo tanto se procede a usar regla de la cadena

  $$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u$$

  Con esto, la ED se transforma en

  $$u\frac{du}{dy} = f(u, y) \rightarrow \text{ED de primer orden en las variables } u,\ y.$$

  Solucionamos la anterior ED, se devuelve la sustitución para u y finalmente se encuentra $y(x)$.

1.10. Teorema de existencia y unicidad (TEU)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{10}$$

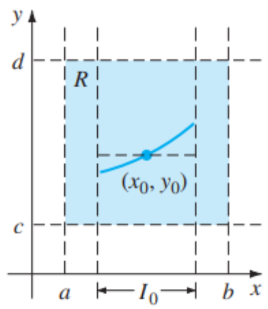

Figura 1: Región rectangular R (TEU)

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo $I_0 : (x_0 - h, x_0 + h),\ h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función única $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del problema con valores iniciales (10). Prueba gráfica de este teorema puede ser observada en la figura 1. Así, este teorema permite comprobar la existencia y unicidad de solución a ED lineales de primer orden con tan sólo interceptar los dominios de $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y comprobar que el PVI cumpla con que (x_0, y_0) pertenezcan a este intervalo.

1.10.1. Ejemplo

Comprobar con el anterior teorema la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

Solución: Analizando las funciones

$$f(x,y) = xy^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{\frac{1}{2}}}$$

Se puede observar que son continuas en la mitad superior del plano definido por $y > 0$, pues $Dom(f) = \{\mathbb{R}^2\}$ y $Dom(f_y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Por tanto el teorema permite concluir que a tráves de cualquier punto $(x_0, y_0), y_0 > 0$ en la mitad superior del plano existe algún intervalo centrado en x_0 en el cual la ED tiene solución unica.

1.11. Aplicaciones

1.11.1. Mezclas

A un tanque que contiene un volumen V_0 de una mezcla le entra un volumen $V_e(t)$ de una mezcla de agua con una cantidad $C_e(t)$ de sal disuelta y al mismo tiempo sale un volumen $V_s(t)$ de la mezcla del tanque con una concentración $C_s(t)$ (ver figura 2). La razón de entrada de salmuera al tanque es pues el producto del volúmen de entrada de agua con la cantidad disuelta de salmuera en él: V_eC_e. Similarmente para la razón de salida de salmuera, la cual es el producto entre el volumen y concentración de salida V_sC_s, donde C_s se define como $\frac{Q(t)}{V(t)}$.

Si se denota como $Q(t)$ a la cantidad de sustancia en el tiempo t y $V(t)$ al volúmen de la mezcla en el tiempo t, se tiene

$$V(t) = V_0(t) + (V_e - V_s)t \quad \text{y} \quad \frac{dQ}{dt} = \begin{pmatrix} Razon \\ entrada \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Razon \\ salida \end{pmatrix} = V_eC_e - V_s\frac{Q(t)}{V(t)}$$

Tras resolver esta ED, es posible hallar la cantidad de sal Q para cualquier tiempo t definido en la función[1].

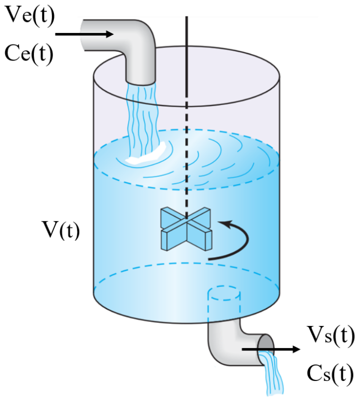

Figura 2: Tanque de mezclado

1.11.2. Dinámica de poblaciones

Si $P(t)$ denota la población al tiempo t entonces la ED que describe el crecimiento de la población para cualquier instante $t \geq 0$ es

$$\frac{dP}{dt} \propto P \Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP$$

Donde k es una constante de proporcionalidad. Este modelo se usa principalmente para el crecimiento de pequeñas poblaciones en intervalos de tiempo cortos (por ejemplo, crecimiento de bacterias en caja Petri).

1.11.3. Drenado de tanques (Ley de Torricelli)

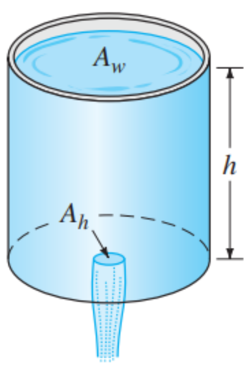

Figura 3: Ley de Torricelli para cilindro

La **ley de Torricelli** establece el modelo para el flujo de un fluido a través de un orificio en un tanque. Relacionando el cambio en el volumen(V) a la velocidad(v) de caída del fluído $v = \sqrt{2gh}$, y el área A_h del orificio así

$$\frac{dV}{dt} = -A_h\sqrt{2gh} \tag{11}$$

Donde g denota la gravedad y h la altura del tanque. Siendo esta la ecuación diferencial de flujo ideal de Torricelli, la ecuación diferencial de flujo real está dada por

$$\frac{dV}{dt} = -C_d A_h\sqrt{2gh}$$

Donde C_d es el coeficiente de descarga que se utiliza para obtener el valor de caudal real.

Sin embargo la ecuación (11) no es posible resolverla. Ahora, se puede observar que el volumen de un tanque para un tiempo t está denotado por $V(t) = A_w(h)h(t)$, donde $A_w(h)$

[1]Para ver ejemplos en la resolución de aplicaciones, se hace la invitación a revisar los talleres que se encuentran en esta carpeta de drive en los apartados de talleres y solución de talleres

es el área de la sección transversal del diferencial del volumen en función de la altura. Por tanto el cambio del volumen del tanque considerando el área de la sección transversal constante es $\frac{dV}{dt} = A_w \frac{dh}{dt}$, reemplazando en (11), se llega a

$$A_w \frac{dh}{dt} = -A_h \sqrt{2gh} \tag{12}$$

En la figura 3, se puede observar una ilustración gráfica de esta ley para un cilíndro.

1.11.4. Cuerpos en caída (Segunda ley de Newton)

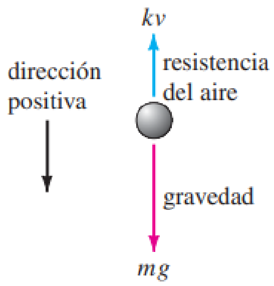

Figura 4: Condiciones caída libre

La segunda ley de Newton plantea que

$$\sum_{i}^{n} F_i = ma$$

Donde el lado izquierdo de la ecuación denota la *fuerza neta* que actúa sobre un objeto, m es la masa del objeto y a su aceleración. Si se considera una dirección positiva hacia abajo, una fuerza hacia abajo dada por el peso $F_1 = mg$ y una resistencia al aire proporcional a la velocidad instantánea (también llamada amortiguamiento viscoso) $F_2 = -kv$ que actúa en la dirección contraria como se observa en la figura 4. La aceleración a puede ser reescrita como $a = \frac{dv}{dt}$. Por lo que la segunda ley de Newton se tranforma en

$$F_{\text{neta}} = m\frac{dv}{dt}$$

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt} \tag{13}$$

La última ecuación es una ecuación diferencial de primer orden para la velocidad instantánea $v(t)$, que permite saber la velocidad del objeto para cualquier tiempo t considerando la resistencia del aire. También, si no se considera la misma, la ecuación se convierte en

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{14}$$

Con esto, se puede hallar la velocidad límite tras resolver el **PVI** inicial como:

$$v_{\text{límite}} = \lim_{t\to\infty} v(t)$$

Ahora bien, para la posición $x(t)$ se considera $v(t) = \frac{dx}{dt}$, por lo tanto

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Lo cual convierte las ecuaciones (13) y (14) en

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = mg \quad \wedge \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

Respectivamente para hallar la posición $x(t)$ del objeto en cualquier instante t, en el caso de la izquierda cuando hay resistencia del aire y en el de la derecha cuando no lo hay.

1.11.5. Trayectorias ortogonales

Cuando todas las curvas de una familia $G(x, y, c_1) = 0$ intersectan ortogonalmente (forman un ángulo de 90°) todas las curvas de otra familia $H(x, y, c_2)$, se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre sí, como se puede observar en la figura 5. Si $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de la familia, entonces la ED para la familia de trayectorias ortogonales se puede inferir a partir de la definición de ortogonalidad, la cual dice que el producto de las pendientes es igual a -1, por lo que se llega a la ED:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x, y)}$$

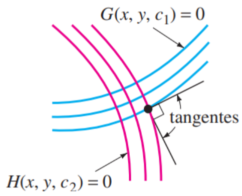

Figura 5: Trayectorias ortogonales

1.11.6. Crecimiento o decrecimiento exponencial (reacción química de primer orden)

Si se denota la cantidad de una sustancia A en un cierto momento en el tiempo como $Q(t)$, se tiene que el crecimiento/decrecimiento en cierto tiempo t es proporcional a la cantidad de sustancia en el tiempo t, es decir

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad \xrightarrow{Resolviendo} \quad Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

Nota: Si se conoce la vida media τ (tiempo que tarda en pasar de $Q(t)$ a $0.5Q(t)$), se puede demostrar que

$$\tau = -\frac{\ln(2)}{k}$$

Lo que permite encontrar el valor de k y hallar la solución de la ED.

1.11.7. Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

De acuerdo con la ley empírica de Newton de enfriamiento/calentamiento, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, que se llama temperatura ambiente. La traducción matemática de esta ley es la siguiente

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Donde T_m es constante y denota la temperatura ambiente. Como consecuencia de T_m ser constante, $k < 0$.

1.11.8. Decaimiento radiactivo

La tasa de decaimiento de la masa de un material radiactivo es proporcional a la propia masa, así

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)$$

Donde $x(t)$ denota la cantidad de material radiactivo y la constante $k < 0$. Por lo tanto, la solución de estos ejercicios es similar a la vista en la sección 1.11.6. sobre decrecimiento exponencial.

2. Parcial 2

2.1. ED lineales de orden superior

Una ED lineal de orden n es aquella de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Donde $a_n(x), \ldots, a_0(x), g(x)$ son funciones conocidas y están definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a_n(x) \neq 0$ para que el orden de la ED sea n. Normalizando la ED anterior, se obtiene

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{15}$$

2.2. Teorema de existencia y unicidad para PVI's lineales de orden superior

Considere el PVI

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \\ y^{(i)}(x_0) = y_i, \ 0 \leq i \leq n-1 \end{cases} \tag{16}$$

De (15), sean $p_{n-1}(x), \ldots, p_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I (con $a_n(x) \neq 0$). Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales (16) existe en el intervalo y es única. Así, para comprobar la existencia y unicidad de una solución y/o hallar el intervalo I de la misma, sólo hace falta verificar lo siguiente:

1. $a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$
2. Las funciones $p_{n-1}(x), \ldots, p_0(x)$ y $g(x)$ son continuas en I
3. $x_0 \in I$

2.3. Dependencia e independencia lineal

Si el conjunto de funciones $A = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ son funciones dadas

- El conjunto es linealmente dependiente en I si existen números reales $c_1, c_2, \ldots, c_n$, donde al menos uno sea distinto de cero, tal que

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

- El conjunto es linealmente independiente en I si $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$ para la anterior expresión, es decir, la única combinación lineal que satisface $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \ \ \forall x \in I$ es $c_i = 0, \ 1 \leq i \leq n$.

2.4. Wronskiano

Suponga que el conjunto de funciones $A = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}$ son derivables al menos hasta el orden $k-1 \ \ \forall x \in I$. Se denota el Wronskiano del conjunto como el siguiente determinante:

$$W(A)(x) = W(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \cdots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

2.5. Criterio del Wronskiano para funciones

Suponga que existe el Wroskiano para un conjunto $A = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}$ de funciones, entonces

- Si el conjunto A es linealmente dependiente, el Wronskiano $W(A)(x) = 0 \ \ \forall x \in I$. En caso que se parta de tener $W(A)(x) = 0$, no se puede afirmar que el conjunto sea linealmente dependiente.
- Para algún punto x_0 en I, si $W(A)(x_0) \neq 0$, entonces el conjunto A es linealmente independiente en el intervalo.

2.6. Criterio del Wronskiano para soluciones de una ED

Considere la ED (15) en la cual $p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ son funciones continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Suponga que $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son soluciones de (15) en I, entonces:

- $W(y_1(x), y_2(x)), \ldots, y_n(x) \neq 0 \ \ \forall x \in I$ y en este caso $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son linealmente independientes en I.
- En caso contrario, $W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = 0 \ \ \forall x \in I$ y las soluciones son linealmente dependientes en I.

2.7. Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $A = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ de n soluciones **linealmente independientes** de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (15) en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo, por lo cual A es una base para el espacio generado por todas las soluciones de la ED.

2.8. Teorema de Abel

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones de la ED (15), entonces existe c tal que

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x) = ce^{-\int p_{n-1}(x)dx}$$

Como consecuencia del teorema de Abel, si el Wronskiano llega a ser cero para algún x, entonces el Wronskiano es cero para todo el intervalo.

2.9. Teorema fundamental

Sea el conjunto $A = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ de soluciones de la ED lineal homogénea de orden n (15), donde las funciones $p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ son continuas sobre un intervalo I. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A forma un conjunto fundamental de soluciones de la ED.
- A es un conjunto linealmente independiente sobre I.
- $W(A)(x_0) \neq 0$ para algún punto $x_0 \in I$
- $W(A)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$

2.10. Métodos de solución de ED de orden superior

En general la resolución de una ED de orden superior es de la siguiente forma:

$$y(x) = \underbrace{c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)}_{\text{Solución ED homogénea}} \quad + \quad \underbrace{y_p(x)}_{\text{Solución particular}} \tag{17}$$

Donde el conjunto $y_c(x) = A = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ son soluciones de la ED homogénea (igualada a 0) y $y_p(x)$ es una solución particular de la ED no homogénea. Así para resolver una ED de orden superior se debe:

1. Resolver la ED homogénea de la forma

   $$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

   encontrando así un conjunto y_c L.I solución.
2. Encontrar una solución particular y_p de la ED no homogénea, es decir, de la forma

   $$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x)$$

3. Finalmente se expresa la solución general como en la ecuación (17)

2.10.1. Reducción de orden

Es el caso más simple, considere una ED de segundo orden normalizada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Con $p(x)$ y $q(x)$ continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Donde se conoce una solución de la misma, es decir

$$y_c = \left\{ \underbrace{y_1(x)}_{\text{conocida}}, \underbrace{y_2(x)}_{\text{desconocida}} \right\}$$

Por lo tanto, se busca encontrar la segunda solución $y_2(x)$ tal que y_c sea un conjunto fundamental de soluciones (C.F.S) en I. Así, se plantea encontrar una función $\mu(x)$ de modo que $y_2(x) = \mu(x)y_1(x)$. La cual está dada por la expresión

$$\mu(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}\, dx$$

Así, se encuentra la segunda solución de la ED como

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}\, dx$$

2.10.2. ED lineales homogéneas con coeficientes constantes

Considere la ED lineal homogénea con coeficientes constantes, es decir

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{18}$$

Donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y $a_n \neq 0$. Así, se quiere obtener n soluciones de la ED de la forma $y = e^{rx}$, para ello:

1. Extraer la ecuación característica de la ecuación diferencial, la cual está dada por

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

   Se puede ver como que cada derivada de y se reemplaza por r elevado al número de derivada. Así, la tercera derivada ($y^{(3)}$) se reemplaza por r^3.

2. Encontrar las raíces de la ecuación característica resolviendo

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

3. Dependiendo de las raíces y si son o no repetidas, se expresa la solución general como la combinación lineal

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

Casos de las raíces

- **Caso 1: n raíces reales distintas.** Un conjunto fundamental de soluciones para la ED es

$$A = \{y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}, \ldots, y_n(x) = e^{r_n x}\}$$

  Donde cada r_i corresponde a cada raíz real.

- **Caso 2: n raíces reales con algunas repetidas.** Suponiendo que las raíces de la ecuación característica son

$$r_1, r_2, \ldots, \underbrace{r_m, r_m, r_m, \ldots, r_m}_{\text{k veces}}, \ldots, r_n$$

  Entonces las soluciones de la raíz r_m se expresan como:

$$y_m(x) = \sum_{i=1}^{k} x^{i-1} e^{r_m x}$$

Por lo que de una manera más simple, el conjunto fundamental de soluciones dado por la raíz r_m es

$$\{e^{r_m x}, xe^{r_m x}, x^2 e^{r_m x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_m x}\}$$

Finalmente el C.F.S estará dado por

$$A = \{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_m x}, xe^{r_m x}, x^2 e^{r_m x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_m x}, \ldots, e^{r_n x}\}$$

- **Caso 3: raíces complejas no repetidas.** Este caso puede tener raíces reales, de las cuales cada solución se puede encontrar con los 2 casos anteriores. Ahora bien, si se tiene una raíz compleja r cuyo conjugado se denota $\bar{r}$, tal que $r = a + bi$ y $\bar{r} = a - bi$, el aporte de este par complejo conjugado al CFS es

$$\left.\begin{array}{r} a+bi \\ a-bi \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{identidad de Euler}} \{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$$

  Nota: Si en algún punto le es dado digamos $a+bi$ y se le pide hallar la ED original, lo puede hacer devolviéndose con la ecuación característica, recuerde que esta raíz compleja sería $r = (a+bi)(a-bi)$, ya que cada raíz compleja tiene su conjugado.

- **Caso 4: raíces complejas con repeticiones.** Aquí una forma sencilla de verlo es como una combinación de los casos 2 y 3, donde cada par complejo conjugado hace aporte y sus $k-1$ repeticiones se ven multiplicadas por x^{k-1} según corresponda, donde la repetición 0 es $k = 1$. Así el conjunto de soluciones dadas por esta raíz sería:

$$\left.\begin{array}{r} a+bi \\ a-bi \end{array}\right\} \to \left\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx), xe^{ax}\cos(bx), xe^{ax}\operatorname{sen}(bx), \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos(bx), x^{k-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\right\}$$

De este modo, la solución general estará dada por el conjunto fundamental de soluciones aportado por cada una de las raíces teniendo en cuenta cada uno de los casos anteriores.

2.10.3. Fórmula de De Moivre

Como complemento la sección 2.10.2, específicamente para el caso de raíces complejas, se presenta la fórmula de De Moivre, la cual dicta: si $z = \alpha + \beta i$ es un número complejo, y $\theta = \arg(z)$ el ángulo que forma el vector con el eje real, entonces las n raíces n-ésimas de z están dadas por

$$r_k = |z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Ejemplo: Si se quiere resolver la ED $y^{(4)} + y = 0$, se deben hallar las raíces de la ecuación característica

$$\begin{aligned} r^4 + 1 &= 0 \\ r^4 &= -1 \end{aligned}$$

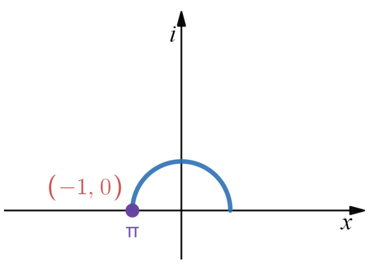

Figura 6: Ejemplo De Moivre

Así, $z = -1, |z| = 1, \arg(z) = \pi$. Al usar la fórmula de De Moivre, las raíces 4-ésimas de -1 vienen dadas por

$$r_k = \left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Por consiguiente, se puede demostrar que

$$r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ r_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ r_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Y finalmente, la solución general de $y^{(4)} + y = 0$ es:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + c_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + c_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right),\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

2.10.4. Ecuación de Cauchy-Euler

La ecuación de la forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, 1_0$ son constantes y $a_n \neq 0$, se conoce como ecuación de Cauchy-Euler. Esta ED tiene la particularidad que el grado de la derivada es el mismo número exponente de la variable x que le acompaña. **Nótese** que cuando $x = 0$, el coeficiente a_n se vuelve 0, por lo que se busca soluciones en el intervalo $(0, \infty)$, así, si la ED es definida en el intervalo $(-\infty, 0)$ se hace la sustitución $t = -x$.

Método de solución: Estas ED's se resuelven un poco similar a las de coeficientes constantes, sin embargo el método para encontrar la ecuación característica y la forma de las soluciones varía. En general, se busca soluciones de la forma $y = x^r$. Por lo tanto, un conjunto fundamental de solución estará dado por

$$A = \{x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n}\}$$

Así pues, para hallar estas raíces se parte de la forma de solución $y = x^r$ y se deriva n veces para sustituir en la ED, de forma tal que $y' = rx^{r-1}, y'' = r(r-1)x^{r-2}$ y así sucesivamente, en una ED homogénea de tercer grado se vería como:

$$a_3 x^3 \left[r(r-2)(r-1)x^{r-3}\right] + a_2 x^2 \left[r(r-1)x^{r-2}\right] + a_1 x \left[r x^{r-1}\right] + a_0 [x^r] = 0$$

puesto que $x^3 x^{-3} = 1$ y dividiendo toda la ecuación por x^r se obtiene finalmente la ecuación característica, de donde se sacan las raíces

$$a_3 r(r-2)(r-1) + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

En conclusión, el método a llevar a cabo es

1. reemplazar todos los términos de las derivadas n-ésimas con las formas de solución como $y = x^r, y' = rx^{r-1}$
2. Simplificar las $x's$ haciendo operaciones de misma base diferente exponente y dividir toda la ED homogénea en x^r
3. Encontrar las raíces de la ecuación característica encontrada en el paso 2
4. Finalmente encontrar el conjunto fundamental A de solución según si son raíces reales o complejas y si hay repetidas o no.

Caso particular ecuación de cauchy-Euler de segundo grado: En este caso, hay una "forma" de ahorrar pasos para encontrar la ecuación característica. Considere pues la ED homogénea de segundo orden

$$ax^2y'' + bxy' + cxy = 0$$

Donde a, b, c son números reales. La ecuación característica de esta ED es:

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Casos de la ecuación característica o auxiliar

- **Caso 1: Raíces reales:** En este caso el C.F.S está dado por

  $$A = \{x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n}\}$$

  En caso de haber repetición, similar al método de coeficientes constantes se multiplican las $k-1$ repeticiones pero en este caso por $(\ln x)^{k-1}$, así, un C.F.S con k veces r_m raíces es

  $$A = \left\{x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_m}, (\ln x)x^{r_m}), (\ln x)^2 x^{r_m}), \ldots, (\ln x)^{k-1}x^{r_m}, \ldots, x^{r_n}\right\}$$

- **Caso 2: Raíces complejas:** Aquí, cada par complejo conjugado aporta al C.F.S:

  $$\left.\begin{matrix} a+bi \\ a-bi \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{identidad de Euler con } x=e^{\ln x}} \{x^a \cos(b \ln x), x^a \operatorname{sen}(b \ln x)\}$$

  Por lo que el C.F.S sería

  $$A = \{x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^a \cos(b \ln x), x^a \operatorname{sen}(b \ln x), \ldots, x^{r_n}\}$$

  En caso de haber repetición, se multiplica por $\ln x$ similar al caso anterior

Reducción a coeficientes constantes

La similitud entre este método y el de coeficientes constantes no es ninguna coincidencia, si se desea utilizar este segundo método sólo hace falta hacer la sustitución $t = \ln x$ ó $x = e^t$, utilizando regla de la cadena donde sea debido y la ED de Cauchy-Euler podrá ser resuelta en términos de t como una ED de coeficientes constantes.

2.10.5. Método de los coeficientes indeterminados para soluciones particulares

Considere la ED lineal de orden n cuyos **coeficientes son constantes** y suponga que se conoce un C.F.S $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de la ED homogénea. Entonces para hallar la solución particular y_p se procede de la siguiente manera:

1. Se hace una propuesta de y_p teniendo en cuenta la función $g(x)$ y la tabla (1)
2. Se modifica o no la propuesta hecha en el paso anterior la cual dependerá del C.F.S A y algunas reglas para este paso que se discutirán más adelante.
3. Una vez se tenga una propuesta de solución, se reemplaza en la ED y se determinan las constantes que aparecen en la propuesta, de modo que y_p sea solución particular de la ED.

Tabla 1: Coeficientes indeterminados

$g(x)$	Primer propuesta de solución
1. $p_k(x)$, polinomio de grado k	$A_0 + A_1x + \cdots + A_kx^k$
2. $p_k(x)e^{\alpha x}$	$(A_0 + A_1x + \cdots + A_kx^k)e^{\alpha x}$
3. $p_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$(A_0 + A_1x + \cdots + A_kx^k)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + (A_0 + A_1x + \cdots + A_kx^k)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$
4. $p_k(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$	$(A_0 + A_1x + \cdots + A_kx^k)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + (A_0 + A_1x + \cdots + A_kx^k)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

Las constantes A_i, B_j son las constantes por determinar en el paso 3.

Reglas para el paso 2

1. Si ningún sumando de la propuesta inicial es linealmente dependiente con el conjunto fundamental de solución A, en otras palabras, no hay forma de expresar la propuesta inicial como combinación lineal de las soluciones en A, la propuesta no se modifica y se procede con el paso 3.
2. Si al menos uno de los sumandos de la propuesta inicial es linealmente dependiente con el conjunto fundamental de soluciones, la propuesta debe modificarse, siendo una propuesta adecuada:

$$x^s y_{\text{p.i}}, \quad y_{\text{p.i}} = \text{propuesta inicial}$$

siendo el número s el primer número natural tal que $x^s y_{\text{p.i}}$ es linealmente independiente al conjunto fundamental de solución.

2.10.6. Método de variación de parámetros para soluciones particulares

Considere una ED lineal no homogénea de grado n **normalizada** de la forma

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = g(x)$$

cuyo C.F.S de la homogénea es $A = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$. Se supone pues que la solución particular de la ED es de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x) \tag{19}$$

Para conocer las expresiones de las primeras derivadas de los u_k's, es decir los u_k',es necesario recordar que por propiedad del C.F.S, las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son L.I, es decir, $W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))(x) \neq 0$, $\forall x \in I$; también, se definen los W_k's como el ***determinante*** que se obtiene al reemplazar la k-ésima columna del wronskiano por el vector

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$$

Así:

$$W_k = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & 0 & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & 0 & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & g(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$u_k' = \frac{W_k}{W} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & 0 & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & 0 & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & g(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))(x)}, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

Por lo que para hallar la solución particular, la ecuación (19) se convierte en

$$y_p(x) = \left[\int \frac{W_1}{W}\right] y_1(x) + \left[\int \frac{W_2}{W}\right] y_2(x) + \cdots + \left[\int \frac{W_n}{W}\right] y_n(x)$$

Nota: Este método es particularmente ventajoso respecto al método de coeficientes indeterminados, pues los coeficientes no necesariamente deben ser constantes y permite hallar una solución particular siempre que se pueda resolver la ED homogénea, por lo que no se depende de contados tipos de ecuaciones, sin embargo no siempre es fácil y puede ser un método algo largo y engorroso. **Recuerde** siempre normalizar la ED antes de aplicar este método.

2.11. Aplicaciones: Sistema masa/resorte

La **ley de Hooke** es la "madre" de los resortes, pues dicta cuál es la fuerza F_r(fuerza restauradora) que debe hacer el resorte en función de su elongación s, dependiendo de su constante k, como $F_r = ks$. Así pues, la constante k de un resorte puede ser encontrada si se sabe cuánto elonga el resorte una fuerza a la que es sometido. Ahora bien, imagine que se coloca una masa m en un resorte, la cual lo elonga una distancia s y logra una posición de equilibrio gracias a la fuerza restauradora F_r que se contrarresta con el peso $W = mg$ como se puede ver en las figuras (7a) y (7b).

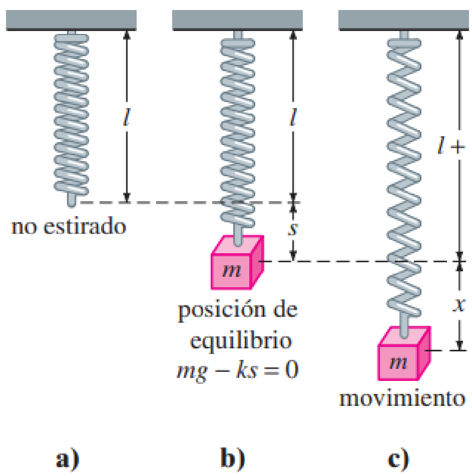

Figura 7: Masa resorte

Si se estira la masa una distancia x como en la figura (7c) **teniendo en cuenta como eje x positivo hacia abajo (ver figura 8)**, se considera una constante de amortiguamiento β en el sistema y una fuerza externa que actúa sobre el mismo, el PVI que describe el sistema es

$$\begin{aligned} &\text{Resolver:} \quad mx'' + \beta x' + kx = f(t) \\ &\text{Sujeto a:} \quad x(0) = x_0, x'(0) = v_0 \end{aligned} \tag{20}$$

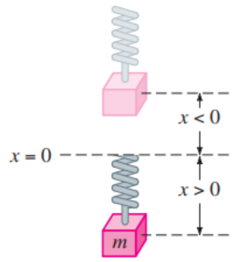

Figura 8: Eje positivo hacia abajo masa resorte

Donde $x(0)$ =posición inicial y $v(0)$ =velocidad inicial. La anterior es una ED no homogénea de segundo orden y coeficientes constantes. Normalizando la ED se obtiene

$$x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{k}{m}x = F(t) \tag{21}$$

Para mayor facilidad en las siguientes secciones correspondientes a aplicaciones de este temario, se hará el siguiente cambio de variables

$$2\lambda = \frac{\beta}{m} \qquad\qquad w^2 = \frac{k}{m}$$

Por lo tanto (21) se convierte en

$$x'' + 2\lambda x' + w^2 x = F(t)$$

De lo cual se puede concluir:

Periodo: $T = \frac{2\pi}{w}$ (tiempo que tarda la masa en ejecutar un ciclo de movimiento) y **frecuencia natural:** $f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$ (número de ciclos completados cada segundo). El número $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ se conoce como la **frecuencia circular del sistema**.

En algunos casos se llegan a soluciones de la forma

$$x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt)$$

de lo cual no se logra observar la amplitud A del movimiento armónico simple, por lo que es conveniente llevar la solución a una forma amplitud fase

$$x(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi)$$

Donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y ϕ es un ángulo de fase definido por

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(\phi) &= \tfrac{c_1}{A} \\ \cos(\phi) &= \tfrac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}$$

La cual se deduce al igualar $x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt = A \operatorname{sen}(wt + \phi)$ y hacer uso de la identidad del seno de la suma de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(wt + \phi) = \operatorname{sen}(wt)\cos(\phi) + \cos(wt)\operatorname{sen}(\phi)$$

Por lo cual

$$c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt) = A \operatorname{sen}(wt)\cos(\phi) + A\cos(wt)\operatorname{sen}(\phi)$$

Y por tanto

$$\begin{pmatrix} A\cos(\phi) \\ A\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Que es una forma más visible para llegar a la solución en forma amplitud fase. Estos sistemas oscilatorios tienen varios casos según su amortiguación y la fuerza externa.

- Movimiento libre $\Rightarrow f(t) = 0$
- Movimiento forzado $\Rightarrow f(t) \neq 0$
- Movimiento no amortiguado $\Rightarrow \beta = 0$
- Movimiento amortiguado $\Rightarrow \beta \neq 0$

Sus posibles combinaciones y análisis se verá en las siguientes secciones.

IMPORTANTE: Debido a que se tomó el eje x positivo hacia abajo, en una gráfica donde se observen las soluciones de la ED, cuando la gráfica va hacia arriba, significa que la masa se mueve hacia abajo; si la gráfica va hacia abajo, la masa se mueve hacia arriba; los puntos en la gráfica $x < 0$ son los instantes de tiempo en los que la masa está por encima de la posición de equilibrio y los puntos $x > 0$ son los instantes de tiempo en los que la masa está por debajo de la posición de equilibrio. Una interpretación similar puede ser hecha con sus derivadas.

2.11.1. Movimiento libre no amortiguado

Para este caso

$$mx''(t) + kx(t) = 0$$

Al normalizar

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \xrightarrow{w^2=\frac{k}{m}} x''(t) + w^2 x(t) = 0$$

Cuya ecuación característica es

$$\begin{aligned} r^2 + w^2 &= 0 \\ r^2 &= -w^2 \\ r &= \pm iw \end{aligned}$$

La solución general de la ED es

$$x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt)$$

Las constantes c_1, c_2 se hallan usando el PVI, y la solución general puede ser expresada en forma amplitud fase.

2.11.2. Movimiento libre amortiguado

Algunas veces, el sistema oscilatorio se ve es amortiguado, por lo que el movimiento deja de ser armónico simple. Algunos ejemplos de cómo se amortigua un sistema masa resorte se puede ver en la figura 9

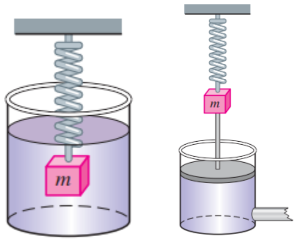

Figura 9: Movimiento amortiguado

Para este caso

$$x'' + 2\lambda x' + w^2 x = 0 \tag{22}$$

La ecuación auxiliar de (22) es pues

$$r^2 + 2\lambda r + w^2 = 0$$

y sus raíces son de la forma

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\underbrace{\lambda^2 - w^2}_{\text{Discriminante}}}$$

Donde el discriminante de la raíz determina 3 subcasos de este tipo de movimiento.

- **Caso 1 (movimiento sobreamortiguado): $\lambda^2 - w^2 > 0$.** En esta situación el sistema está sobreamortiguado porque el coeficiente de amortiguamiento β es grande comparado con la constante del resorte k. La solución general correspondiente es

  $$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - w^2}\; t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - w^2}\; t}\right)$$

  Esta ecuación representa un movimiento un movimiento uniforme y no oscilatorio, como por ejemplo el de la figura 10

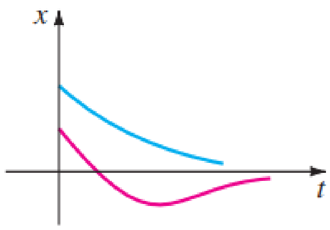

Figura 10: Movimiento sobreamortiguado

  Cuando $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$, se cumple que

  $$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

- **Caso 2 (movimiento críticamente amortiguado):** $\lambda^2 - w^2 = 0$. El sistema está críticamente amortiguado porque cualquier ligera disminución en la fuerza de amortiguamiento daría como resultado un movimiento oscilatorio. Al determinante ser 0, se tienen 2 raíces r iguales, como se vio en la sección **2.10.2** la solución general correspondiente será de la forma

$$x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t) \tag{23}$$

En la figura 11 se ven 2 ejemplos de movimiento críticamente amortiguados

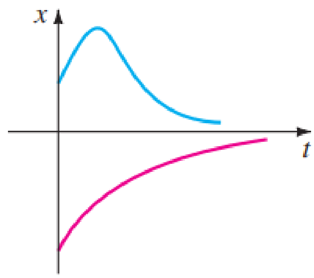

Figura 11: Movimiento críticamente amortiguado

Se puede observar que es un movimiento similar al sobreamortiguado, también de (23) es evidente que **la masa puede pasar a lo sumo 1 vez por la posición de equilibrio**.

- **Caso 3 (movimiento subamortiguado):** $\lambda^2 - w^2 < 0$. En este caso el sistema está subamortiguado puesto que el coeficiente de amortiguamiento β es pequeño respecto a la constante del resorte k. tenderá a ser oscilatorio con un "freno" en el tiempo, pues las raíces son complejas y como se vio en la sección **2.10.2**, las soluciones involucran funciones de seno y coseno. Las raíces son pues

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{w^2 - \lambda^2}\ i \qquad\qquad r_2 = -\lambda - \sqrt{w^2 - \lambda^2}\ i$$

La solución general de la ED es pues la correspondiente:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left[c_1 \cos\left(\sqrt{w^2 - \lambda^2}\ t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{w^2 - \lambda^2}\ t\right)\right]$$

En la figura 12 se puede apreciar cómo el movimiento es oscilatorio pero debido al término $e^{-\lambda t}$ sucede que

$$\lim_{t \to \infty} x(t) \to 0$$

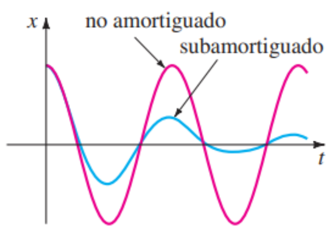

Figura 12: Movimiento subamortiguado comparado con movimiento no amortiguado

Este movimiento puede ser expresado en la forma amplitud fase considerando que $\alpha = \sqrt{w^2 - \lambda^2}$ como:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t}(c_1 \cos(\alpha t) + c_2 \operatorname{sen}(\alpha t)) \\ &= A e^{-\lambda t} \operatorname{sen}(\alpha t + \phi) \end{aligned}$$

Así, se definen **cuasifrecuencia:** $f' = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\sqrt{w^2-\lambda^2}}{2\pi}$ y **cuasiperiodo:** $T' = \frac{1}{f'} = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{w^2-\lambda^2}}$. **Note** que si tiene α, pero no información acerca de las constantes k, λ, es posible devolverse a partir de estas expresiones, lo cual resulta particularmente útil en el curso.

2.11.3. Movimiento forzado con amortiguamiento

Suponga ahora que se tiene un movimiento amortiguado en el cual actúa una fuerza externa $f(t)$, este tipo de movimiento es descrito por la ecuación (21), donde $F(t) = \frac{f(t)}{m}, 2\lambda = \frac{\beta}{m}$ y $w^2 = \frac{k}{m}$. Cuando F es una función periódica, como

$$F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t) \text{ o } F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

La solución general de la para $\lambda > 0$ es la suma de una función no periódica $x_c(t)$ y una función periódica $x_p(t)$. La solución $x_c(t)$ se conoce como **solución transitoria** y esta se desvanece con el tiempo, es decir

$$\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0$$

Así, para valores grandes de tiempo, el movimiento se aproxima mediante la solución particular $x_p(t)$, que también se conoce como **solución de estado estable**, es decir

$$x(t) = \underbrace{x_c(t)}_{\text{Solución transitoria}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{Solución de estado estable}}$$

Por tanto, se observa que el efecto de las condiciones iniciales en un sistema masa/resorte impulsado por F es transitorio, un ejemplo gráfico de esto se observa en la figura 13.

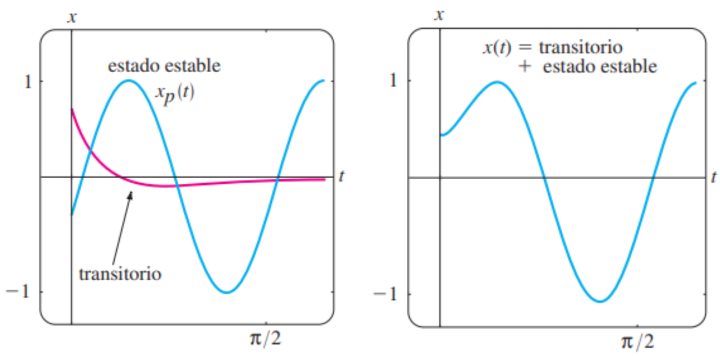

Figura 13: Solución de estado estable y transitoria

2.11.4. Movimiento forzado sin amortiguamiento

Cuando se ejerce una fuerza periódica sin fuerza de amortiguamiento, no hay término transitorio en la solución de un problema. Veamos un caso particular del cual se pueden extraer algunas conclusiones

$$\begin{aligned} \text{Resolver:} \quad & x'' + w^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t) \\ \text{Sujeto a:} \quad & x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Donde F_0 es una constante y $\gamma \neq w$. Aquí la función transitoria es

$$x_c(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt)$$

Para obtener una solución particular se supone $x_p(t) = A\cos(\gamma t) + B \operatorname{sen}(\gamma t)$, así, se puede demostrar que la solución de estado estable es

$$x_p(t) = \frac{F_0}{w^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t)$$

Tras encontrar las constantes c_1, c_2, la solución $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$ es

$$x(t) = \frac{F_0}{w(w^2 - \gamma^2)} \left(-\gamma \operatorname{sen}(wt) + w \operatorname{sen}(\gamma t)\right)$$

Esta solución no se define para $\gamma = w$, pero es interesante saber también su valor límite, que se obtiene por regla de L'Hôpital, esta igualdad describe el movimiento si la frecuencia de la fuerza periódica es cercana o igual a la frecuencia de vibraciones libres amortiguadas. Así:

$$x(t) = \lim_{\gamma \to w} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen}(wt) + w \operatorname{sen}(\gamma t)}{w(w^2 - \gamma^2)} = \frac{F_0}{2w^2} \operatorname{sen}(wt) - \frac{F_0}{2w} t \cos(wt)$$

Aquí, conforme $t \to \infty$ los desplazamientos se vuelven largos, de hecho $|x(t_n)| \to \infty$ cuando $t_n = \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, \ldots$. Este fenómeno se conoce como **Resonancia pura**, la cual en pocas palabras ocurre cuando en un ejercicio observe $\gamma = w$. En general no hay necesidad de tomar límite para resolver la ED (24) con $\gamma = w$.

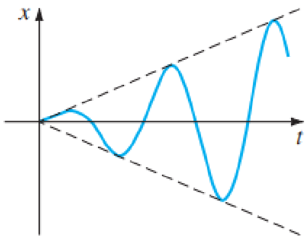

Figura 14: Resonancia pura

3. Parcial 3

3.1. Soluciones en series de potencias en torno a puntos ordinarios

[2] Esta técnica permite resolver ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones de la forma:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Con $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ continuas y definidas en un intervalo I. Estas funciones deben ser analíticas en un punto (x_0) con $x_0 \in I$, es decir, esta tiene representación en serie de potencias de $x - x_0$ con radio de convergencia positivo.

Se buscan soluciones en forma de series de potencias:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{25}$$

Con x_0 el lugar donde está centrada la solución de la ecuación diferencial. Usualmente $x_0 = 0$. El cual para que la ED tenga solución deberá ser un punto ordinario, es decir, que en x_0 las funciones $\frac{a_1}{a_2}$ y $\frac{a_0}{a_2}$ son ambas analíticas. Si esto no ocurre el punto se denomina punto singular y la ED no tiene solución en forma de series de potencias.

[2] La sección de series fue escrita en colaboración con Victoria Valencia Velez, a quien agradezco por su apoyo en la escritura de este resumen.

3.1.1. Fórmula de recursividad

Este método consiste en los siguientes pasos:

1. Derivar la ecuación (25) tantas veces como el orden de la ecuación lo pida.
2. Reemplazar la ecuación (25) y sus derivadas en la ecuación diferencial.
3. Igualar las potencias de x para cada una de las sumatorias (todas llevarlas a x^n): Si se tiene x^{n-a}, se suma a a todos los elementos dentro de la sumatoria exceptuando los limites, en cuyo caso, el limite inferior se le restará a.
4. Iniciar las sumatorias en el mismo índice (se inician en el índice con mayor valor): para esto se escriben explícitamente los primeros términos de las demás sumatorias hasta llegar al índice deseado.
5. Se agrupan los coeficientes por potencias iguales de x.
6. Se igualan los coeficientes que están acompañados por x^0 y x^1 y se obtiene la formula de recurrencia a partir de la formula dentro de la sumatoria despejando a_{n+a}.
7. Desde la formula de recurrencia se obtienen los coeficientes y la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo: Encontrar solución en series de potencias de la ED dentro del intervalo $(-\infty, \infty)$:

$$y'' - x^2 y' + y = 0$$

1. Se busca una solución de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Como el orden de la ED es 2, se deriva esta expresión 2 veces, así:
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$
2. Se reemplaza en la ED, de la siguiente forma
$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{(1)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x) x^{n+1}}_{(2)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{(3)} = 0$$
3. Se ajustan las potencias, así:
$$(1) \sum_{n=2-2}^{\infty} (n+2)(n-1+2) a_{n+2} x^{n-2+2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$
$$(2) \sum_{n=1+1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n+1-1} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$$
Observe que (3) ya se encuentra con la potencia x^n. En la ecuación:
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
4. Iniciando las sumatorias en el mismo índice:
$$\underbrace{2a_2}_{n=0 \text{ para } (1)} + \underbrace{6a_3 x}_{n=1 \text{ para } (1)} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \underbrace{a_0}_{n=0 \text{ para } (3)} + \underbrace{a_1 x}_{n=1 \text{ para } (3)} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0$$

5. Agrupando:

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)a_{n-1} + a_n\right] x^n = 0$$

6. Igualando y despejando a_{n+2}:

$$a_0 + 2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_1 + 6a_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{a_1}{6},$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)a_{n-1} + a_n = 0 \Leftrightarrow \underbrace{a_{n+2} = \frac{(n-1)a_{n-1} - a_n}{(n+2)(n+1)}}_{\text{Fórmula de recurrencia}};\ n \geq 2$$

7. Dándole valores a la fórmula de recurrencia para esta ecuación se encuentra la solución $y(x)$ a la ED en términos de a_0 y a_1:

$$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \pm \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 \pm \cdots\right)$$

3.1.2. Series de Taylor

Dada la ED:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Después de verificar que $\frac{a_1}{a_2}$ y $\frac{a_0}{a_2}$ son funciones analíticas en $x_0 = 0$ y que x_0 es un punto ordinario, se busca una solución en forma de serie de Taylor centrada en $x_0 = 0$, como:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

De aquí se sabe que los coeficientes c_n deben cumplir:

$$c_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \tag{26}$$

Ecuación la cual permite encontrar los coeficientes de la solución en series de potencias a partir de las n-ésimas derivadas de la función evaluada en x_0. Notar que $c_0 = y(0)$ y $c_1 = y'(0)$ son constantes arbitrarias. En caso de tener un PVI estas serán dadas.

Ejemplo: Dada la ED, encontrar su solución en series de potencias:

$$e^x y'' + xy = 0$$

Se puede mostrar que las funciones $\frac{0}{e^x} = 0$ y $\frac{x}{e^x} = xe^{-x}$ son funciones analíticas en $x_0 = 0$ y su radio de convergencia de sus representaciones en series de potencias es positivo. Por lo cual se procede a determinar los coeficientes para la solución en series de potencias de la ED:

Como se sabe, $c_0 = y(0)$ y $c_1 = y'(0)$. Ahora, utilizando la ecuación (26) y despejando y'' de la ED $y'' = -\frac{xy}{e^x}$:

$$c_2 = \frac{y''(0)}{2} = \frac{(0)y(0)}{e^0} = 0$$

Para encontrar c_3 se deriva la ED:

$$e^x y^{(3)}(x) + e^x y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

Evaluando en $x_0 = 0$:

$$(1)y^{(3)}(0) + (1)(0) + (0)y'(0) + c_0 = 0 \Rightarrow y^{(3)}(0) = -c_0$$

Se obtiene:

$$c_3 = \frac{-c_0}{6}$$

Para encontrar c_4 se procede a derivar nuevamente y evaluar en $x_0 = 0$, obteniendo $c_4 = \frac{c_0 - c_1}{12}$

Así, se puede demostrar que la respuesta en series de potencias de la ED es:

$$y(x) = c_0\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} \pm \ldots\right) + c_1\left(x - \frac{x^4}{12} \pm \ldots\right)$$

3.2. Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$. Entonces la integral impropia

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{27}$$

es la **transformada de Laplace** de $f(t)$, siempre que la integral impropia exista. De este modo se hacen las siguientes observaciones:

- Si (27) existe, se escribe $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, donde a $F(s)$ se le denomina transformada de Laplace de $f(t)$ y $f(t)$ la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ así: $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t)$.
- El **Dominio** de $\mathscr{L}\{f(t)\}$ será el conjunto de los números reales s tales que la integral impropia

  $$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

  converja
- La transformada de Laplace es un operador

  $$f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$$

  El cual permite resolver PVI's, una noción simple de esto es:

  $$\text{PVI} \xrightarrow{\mathscr{L}} \underbrace{\text{Problema algebraico}}_{\text{se resuelve para } y(s)} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \text{Solución PVI } y(t)$$

3.2.1. Propiedad de linealidad

Suponga que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ son dos funciones para las cuales $\mathscr{L}\{f(t)\}$ y $\mathscr{L}\{g(t)\}$ existen para $s > a$. Bajo estas condiciones, sean α, β números reales, entonces

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\}$$

Por lo tanto, se dice que $\mathscr{L}$ es una **transformación lineal**.

3.2.2. Condiciones para la existencia de la transformada de Laplace

Primero, se define el orden exponencial:

Orden exponencial: Se dice que f es de **orden exponencial** c si existen constantes $c, M > 0$, y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para toda $t > T$.

Si $f(t)$ es una función creciente, entonces la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t > T$, simplemente establece que la gráfica de f en el intervalo (T, ∞) no crece más rápido que la gráfica de la función exponencial $Mect$, donde c es una constante positiva. Para ilustrar esto, vea la figura 15. Para funciones periódicas, esta definición se observa graficando las funciones Me^{ct} y $-Me^{ct}$, si la función $f(t)$ es acotada entre estas dos funciones, entonces es de orden exponencial c.

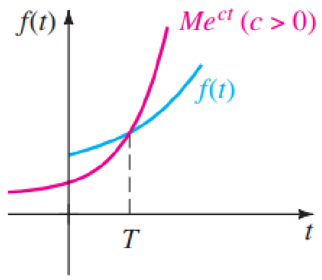

Figura 15: f es de orden exponencial c

Teorema: condiciones suficientes para la existencia. Si f es una función continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial c, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para todo $s > c$.

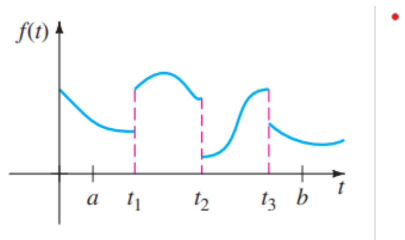

Figura 16: Función continua por tramos

3.2.3. Comportamiento

Si $f(t)$ es continua por tramos en $(0, \infty)$ y de orden exponencial c y $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, entonces

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

3.2.4. Recomendación

Como recomendación, se invita a hacer un repaso sobre cómo expresar una fracción como suma de fracciones parciales, tema que puede ser encontrado en este libro y que será de gran utilidad a la hora de resolver transformadas de Laplace. También, al final de este documento hay un anexo con la tabla 2, la cual contiene algunas de las transformadas de Laplace más usadas. También, Para ver ejemplos en la resolución de aplicaciones, se hace la invitación a revisar los talleres que se encuentran en esta carpeta de drive, como se invitó anteriormente.

3.2.5. Transformada de derivadas

Suponga que existe $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. Entonces se puede demostrar que

- $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
- $\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
- $\mathscr{L}\{f^{(3)}(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

De aquí la recursividad es evidente, por lo que en general:

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$

Caso particular: En algunos casos para resolver una transformada de Laplace, como por ejemplo una función de logaritmo natural $f(t)$, se hace más fácil transformar su derivada $f'(t)$, por lo que la expresión para la transformada de la función original $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ se puede despejar del teorema anterior como sigue (en caso de que se haga con la primera derivada):

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{\mathscr{L}\{f'(t)\} + f(0)}{s}$$

3.2.6. Teoremas de traslación

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

- Primera propiedad de traslación (traslación en el eje s):

  $$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a), \quad \text{para } s > a + c$$

  Notación útil:

  $$F(s-a) = F(s)|_{s \to s-a} = \mathscr{L}\{f(t)\}|_{s \to s-a}$$

  donde $s \to s-a$ significa que en la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ siempre que aparezca el símbolo s se reemplaza por $s-a$. Por lo que el teorema anterior se puede reescribir como

  $$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}|_{s \to s-a}$$

  La forma inversa de este teorema es:

  $$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)|_{s \to s-a}\} = e^{at} f(t)$$

- Segunda propiedad de traslación (traslación en el eje t): Sea $a > 0$

  $$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

  La forma inversa de este teorema es:

  $$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)\mathscr{U}(t-a) = \left(\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}|_{t \to t-a}\right) \mathscr{U}_a$$

  Nota: $\mathscr{U}(t-a) = \mathscr{U}_a$

3.2.7. Derivada de una transformada

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \{F(s)\}$$

Observación: Para encontrar transformadas de funciones $t^n e^{at}$, se puede usar derivada de una transformada o la primer propiedad de traslación.

En términos de transformadas inversas, se puede llegar a lo siguiente:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{dF}{ds}\right\}$$

Por lo que se puede encontrar la transformada inversa de $F(s)$, transformando su derivada y multiplicando por $-\frac{1}{t}$

3.2.8. Convolución

Si las funciones f y g son continuas por tramos en $[0,\infty)$, entonces la convolución de f y g, denotada por $f*g$, se define mediante la integral

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Por ejemplo,

$$e^t*\operatorname{sen}(t)=\int_0^t e^\tau\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}(-\operatorname{sen}(t)-\cos(t)+e^t)$$

Este producto es conmutativo, es decir $f*g=g*f$. Ahora bien, se define el siguiente teorema:

Si para $f(t)$ y $g(t)$ existen $F(s)$ y $G(s)$, entonces:

$$\mathscr{L}\{f*g\}=\mathscr{L}\{f\}\mathscr{L}\{g\}=F(s)G(s)$$

Cuya inversa es

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f*g$$

3.2.9. Transformada de una integral

Como consecuencia de la convolución, si $g(t)=1$, entonces $\mathscr{L}\{g\}=G(s)=\frac{1}{s}$, por consiguiente la transformada de Laplace de $\int_0^t f(t)dt$ es

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\mathscr{L}\left\{\int_0^t 1*f(\tau)d\tau\right\}=\frac{F(s)}{s},\quad \forall\ t\geq 0$$

Si se va a sacar la inversa entonces

$$\int_0^t f(t)dt=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}$$

Particularmente si $F(s)$ está dividido en s^2 sólo haría falta integrar la integral de $f(t)$ de 0 a t y así sucesivamente según el orden del exponente de la s que divide a $F(s)$.

3.2.10. Integral de una transformada

En el caso que la función $f(t)$ esté multiplicada por $\frac{1}{t^n}$, basta con integrar $F(s)$ de s a ∞ una cantidad n de veces, es decir, por definición:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds$$

3.2.11. Transformada de una función periódica

Si una función es periódica con periodo $T, T>0$, entonces $f(t+T)=f(t)$. Así, si $f(t)$ es continua por tramos, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

3.2.12. Otras propiedades

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a \geq 0$.

- Si c es una constante positiva, entonces

$$\mathscr{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad s > ca$$

- Si k es una constante positiva, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

- Si α y β son constantes positivas, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(\alpha s + \beta)\} = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

3.2.13. Función delta de Dirac

Los sistemas mecánicos suelen ser afectados por una fuerza externa (o fuerza electromotriz en un circuito eléctrico) de gran magnitud que actúa sólo por un periodo muy corto. Un modelo para tal fuerza es el siguiente:

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0, & t \geq t_0 + a \end{cases}$$

Cuya gráfica se puede observar en la figura 17

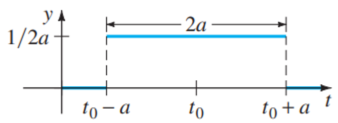

Figura 17: Función $\delta_a(t - t_0)$

Esta función es llamada **impulso unitario** pues sin importar qué tan pequeño es a, es decir, qué tan pequeño sea el instante de tiempo alrededor de t_0 y qué tan grande sea la fuerza, se cumple la propiedad

$$\int_0^{\infty} \delta_a(t - t_0)dt = 1$$

Es decir, el área bajo la curva es siempre 1. En la práctica es conveniente trabajar con otro tipo de impulso unitario que se conoce como **función delta de Dirac** y se define por el límite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0)$$

Cabe recalcar que esta no es realmente una función, sino una aproximación a $\delta_a(t - t_0)$. Una forma gráfica de observar esto se puede ver en la figura 18

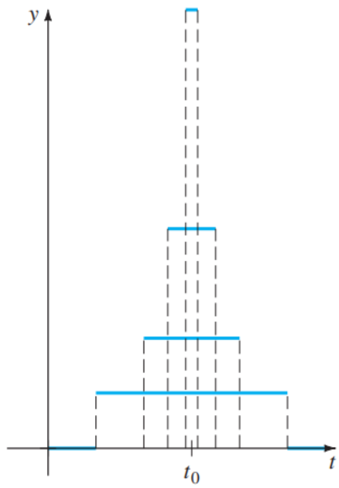

Figura 18: Comportamiento de δ_a conforme $a \to 0$

La función delta de Dirac se caracteriza con las propiedades

$$i)\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad ii) \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$$

Con estas propiedades se puede interpretar como la acción de una fuerza que actúa de manera instantánea en $t = t_0$ y produce un impulso de magnitud 1.

Como resultado de tomar la transformada de Laplace a esta función, se obtiene la siguiente igualdad, que puede ser usada en la resolución de ejercicios que involucren esta "función".

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}, \quad t_0 > 0 \tag{28}$$

Propiedad de cribado: Si $f(t)$ es una función continua, entonces

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

De esta se concluye que $\delta(t-t_0)$ tiene el efecto de separar el valor $f(t_0)$ del conjunto de valores de $f(t)$. Esta propiedad se puede tomar como la definición de $\delta(t-t_0)$. Puede notarse que la propiedad $ii)$ se cumple con $f(t) = 1$ y la ecuación (28) se cumple con $f(t) = e^{-st}$.

3.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Es un conjunto de ecuaciones diferenciales que se puede llevar a la forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{X}}'(t)=} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{X}}(t)+} + \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{F}}(t)}$$

Donde $a_{ij}(t);\ i,j = 1,2,\ldots,n,\ f_i(t),\ i = 1,2,\ldots,n$ son funciones definidas conocidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son las funciones incógnitas.

Dado el sistema de E.D lineal

$$\vec{\mathbf{X}}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{\mathbf{X}}(t) + \vec{\mathbf{F}}(t) \tag{29}$$

se dice que una función vectorial $\vec{\mathbf{X}} : I \to \mathbb{R}^n$ definida como

$$\vec{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

es un vector solución del sistema y sus elementos son funciones derivables.

3.3.1. Teorema de existencia y unicidad

Considere el PVI

$$\text{Resolver: } \vec{\mathbf{X}}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{\mathbf{X}}(t) + \vec{\mathbf{F}}(t)$$
$$\text{Sujeto a: } \vec{\mathbf{X}}(t_0) = \vec{\mathbf{X}}_0$$

Existe una solución única del PVI en I si los elementos de las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\vec{\mathbf{F}}(t)$ son funciones continuas en el intervalo I y $t_0 \in I$.

3.3.2. Dependencia e independencia lineal

Sean $\vec{\mathbf{X}}_1, \vec{\mathbf{X}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{X}}_n$ un conjunto de vectores solución de un sistema de ED lineales homogéneo (donde $\vec{\mathbf{F}}(t) = 0$) en un intervalo I, cuyos vectores están definidos como

$$\vec{\mathbf{X}}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{X}}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{\mathbf{X}}_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

se dice que el conjunto es linealmente independiente si y sólo si el **Wronskiano**

$$W(\vec{\mathbf{X}}_1, \vec{\mathbf{X}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{X}}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

para toda t en el intervalo, vale notar que el Wronskiano es distinto de 0 para toda t en el intervalo o igual a 0 para toda t en el intervalo.

3.3.3. Solución general de un sistema de ecuaciones lineales

Sea $\vec{\mathbf{X}}_p$ una solución particular del sistema de ecuaciones no homogéneo (29) en un intervalo I y sea

$$\vec{\mathbf{X}}_c = c_1\vec{\mathbf{X}}_1 + c_2\vec{\mathbf{X}}_2 + \cdots + c_n\vec{\mathbf{X}}_n$$

la solución del sistema homogéneo, también llamada función complementaria. Entonces la solución general del sistema está dada por

$$\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}_c + \vec{\mathbf{X}}_p$$

3.3.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

Considere un sistema lineal homogéneo de la forma

$$\vec{\mathbf{X}}' = \mathbf{A}_{n\times n}\vec{\mathbf{X}}$$

Y suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz cuyas entradas son constantes. La ecuación característica polinomial en λ de $\mathbf{A}$ es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_{n\times n}) = 0$$

Esta permite obtener los vectores propios $\vec{\mathbf{K_1}}, \vec{\mathbf{K}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{K}}_n$ y los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matriz $\mathbf{A}$. Así, la solución general de este sistema en $(-\infty, \infty)$ está dada por

$$\vec{\mathbf{X}} = c_1\vec{\mathbf{K}}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{\mathbf{K}}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{\mathbf{K}}_n e^{\lambda_n t}$$

Siempre que hayan n valores propios reales y diferentes. Antes de definir los demás casos, recuerde de álgebra lineal que la **multiplicidad algebraica (m.a)** de un valor propio radica en su exponente (o las veces que aparece este valor propio) en la ecuación característica, es decir en la ecuación $p(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0$, la multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = -1$ es 2 y la de $\lambda_2 = 8$ es 1. La **multiplicidad geométrica (m.g)** de un valor propio radica en el número de vectores asociados al espacio vectorial generados por el vector propio. Ahora bien, los demás casos son:

- **Valores propios diferentes (m.a=1) con algunos valores complejos:** De aquí, cada par conjugado estará dado por $\lambda = \alpha \pm \beta i$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Y su solución asociada tras aplicar identidad de Euler es:

  $$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_\lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad\qquad \mathbf{X}_2 = \overline{\mathbf{K}}_\lambda e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

  Así, sea $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ un valor propio complejo y sean

  $$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right) = \operatorname{Re}(K_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \frac{i}{2}\left(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1\right) = \operatorname{Im}(K_1)$$

  Respectivamente las partes real e imaginaria del vector $\mathbf{K}_1$. Entonces la solución asociada al valor propio es finalmente

  $$\mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}\left[\mathbf{B_1}\cos(\beta t) - \mathbf{B}_2\operatorname{sen}(\beta t)\right]$$
  $$\mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}\left[\mathbf{B_2}\cos(\beta t) + \mathbf{B}_1\operatorname{sen}(\beta t)\right]$$

- **Algunos valores propios repetidos (m.a>1) cuya multiplicidad geométrica es igual que la algebraica:** En general este es el caso que se enuncia al principio de esta sección, pues hay un vector propio distinto asociado a cada valor propio, así, si λ_m se repite k veces y es el único valor propio(para dar un ejemplo):

  $$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_m t}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_2 e^{\lambda_m t}, \quad \ldots, \quad \mathbf{X}_k = \mathbf{K}_k e^{\lambda_m t}$$

  Y la solución general estará dada por

  $$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$$

- **Valores propios repetidos (m.a>1) cuya multiplicidad algebraica es mayor a la multiplicidad geométrica:** En este caso el número de vectores asociados a cada valor propio es menor que las veces que se repite, es decir, no hay suficientes vectores propios para la cantidad de valores propios. Ahora bien, si se tiene por ejemplo un valor propio λ_1 con m.a= 2 y cuyo vector propio $\mathbf{K}$ está dado por definición como

  $$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K}_{\lambda_1} = 0$$

  Las soluciones de este valor propio estarán pues dadas por

  $$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} \;\text{ y }\; \mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_{\lambda_1} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P} e^{\lambda_1 t}$$

Donde el vector $\mathbf{P}$ se obtiene tras resolver

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{K}$$

Si la multiplicidad algebraica es 3, se hace un proceso similar en donde $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ son las dadas y $\mathbf{X}_3$ es:

$$\mathbf{X}_3=\mathbf{K}_{\lambda_1}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t}+\mathbf{P}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{Q}e^{\lambda_1 t}$$

Donde el vector $\mathbf{Q}$ se obtiene tras resolver

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{Q}=\mathbf{P}$$

3.3.5. Método de variación de parámetros para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

Se define la matriz fundamental como

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{bmatrix}$$

La cual cumple las siguientes propiedades:

- $\mathbf{\Phi}(t)$ es no singular.
- $\det(\mathbf{\Phi}(t))=W(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n)$
- Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$, entonces

$$\mathbf{\Phi}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)$$

Entonces, análogamente al procedimiento de variación de paramétros visto anteriormente, se desea una solución particular $\mathbf{X}_p=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}(t)$. Por lo que considere el sistema no homogéneo dado por

$$\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{F}(t)$$

La solución particular de este sistema está pues dada por

$$\mathbf{X}_p=\mathbf{\Phi}(t)\int\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt$$

Para resolver esta integral indefinida, se integra cada entrada de la matriz resultante del producto $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{F}(t)$. La solución general estará entonces dada por

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_c+\mathbf{X}_p=c_1\vec{\mathbf{X}}_1+c_2\vec{\mathbf{X}}_2+\cdots+c_n\vec{\mathbf{X}}_n+\mathbf{\Phi}(t)\int\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt$$

A. Transformadas de Laplace

Tabla 2: Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3. $\operatorname{sen}(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
4. $\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
5. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6. $\operatorname{senh}(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
7. $\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
8. $e^{at}\operatorname{sen}(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
9. $e^{at}\cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
10. $J_0(kt)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+k^2}}$
11. $\mathscr{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
12. $\delta(t)$	1
12. $\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}

Referencias

Víctor Cordoba. (2021, junio). *Resumen de ecuaciones diferenciales.* https://drive.google.com/drive/folders/1FmwxmJ5TAV9-oaNtotqMXy0VEuVH_y2K?hl=es

Zill, D. . (2018). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera* (9.ª ed., Vol. 7). Cengage Learning.