Catálogo

3002192 METODOS NUMÉRICOS
PRIMER EXAMEN PARCIAL, 6 DE MARZO DE 2006

NOMBRE___________________________CARNÉ_________

PROFESOR__________________________GRUPO____

1. Considere la ecuación

$$x - 2 + \ln(x) = 0, \text{ con } x > 0.$$

a. (5%) Compruebe que hay un único número real positivo p que es raíz de esta ecuación.
b. (5%) Verifique que se puede aplicar el método de Bisección a la función

$$f(x) = x - 2 + \ln(x)$$

en el intervalo $[1.5, 1.6]$ para aproximar la raíz p.
c. (5%) Calcule las dos primeras iteraciones del método de bisección.
d. (15%) Verifique que la función $g(x) = 2 - \ln(x)$ es tal que:
i. $x = g(x)$ si y solo si $f(x) = 0$.
ii. $g(x)$ satisface las hipótesis del Teorema de Punto Fijo en $[1.5, 1.6]$.
e. (5%) Calcule las dos primeras iteraciones de punto fijo con 1.55 como aproximación inicial. ¿Cúal es el valor aproximado de la raíz p?

2. Considere la ecuación polinómica

$$p(x) = x^3 + 3x - 1 = 0.$$

Al dividir $p(x)$ por el factor cuadrático $(x^2 - ux - v)$ resulta

$$p(x) = \left(x^2 - ux - v\right) q(x) + r(x),$$

con cociente y residuo dados por

$$q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + ... + b_3 x + b_2$$

y

$$r(x) = b_1 (x - u) + b_0$$

respectivamente.

a. (20%) Calcule la primera iteración del método de Bairstow para aproximar un factor cuadrático $x^2 - ux - v$ del polinomio $p(x)$. Utilice $u_0 = -1$ y $v_0 = -3$ como aproximaciones iniciales.
b. (10%) Suponga que el valor de los coeficientes del factor cuadrático es $u = -0.32$ y $v = -3.1$. Encuentre las tres raíces de la ecuación $p(x) = 0$.

3. Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Se sabe que:

i. El polinomio característico de la matriz de iteración de Jacobi T_J es

$$p_{T_J}(x) = -x^3 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{30}.$$

ii. La matriz de iteración del método de Gauss-Seidel es

$$T_G = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & -0.3 & -0.7 \end{bmatrix}.$$

iii. El polinomio característico de T_G es $p_{T_G}(x) = -x\left(x^2 + \frac{2}{15}x + \frac{1}{15}\right)$.

a. (10%) Analice la convergencia del método de Jacobi para este sistema.
b. (10%) Analice la convergencia del método de Gauss-Seidel para este sistema.
c. (7%) Escriba las fórmulas escalares de iteración del método de Jacobi para el sistema dado y calcule una iteración con aproximación inicial $X^{(0)}$ dada por el vector nulo.
d. (8%) Escriba las fórmulas escalares de iteración del método de Gauss-Seidel para el sistema dado y calcule una iteración con aproximación inicial $X^{(0)}$ dada por el vector nulo.

UNIVERSIDAD NACIONAL, MEDELLIN
METODOS NUMERICOS 3002192
SEPTIEMBRE 4 DE 2006, PRIMER PARCIAL

NOMBRE________________________________CARNÉ__________

1. Sea
$$g(x) = -1 + \frac{1}{4}(x+1)^2$$

a. (5%) Resuelva $x = g(x)$ y compruebe que los puntos fijos de $g(x)$ son $x = -1$ y $x = 3$.

b. (5%) Para el intervalo $I = [-2, 0]$ pruebe que $g(x) \in I$ para todo $x \in I$. ¿Qué se concluye de este hecho?

c. (5%) Para el mismo intervalo I, encuentre una constante K tal que $|g'(x)| \leq K < 1$. ¿Qué se concluye de este hecho?

d. (5%) Realice dos iteraciones de punto fijo para $g(x)$ con punto inicial $x = -5$. Compruebe que se trata de una iteración convergente. ¿A qué punto fijo converge?

e. (5%) Si el punto inicial es $x = 3$, ¿será convergente la iteración de punto fijo? ¿A cuál punto fijo?

f. (5%) Si el punto inicial es $x = -1.5$, ¿será convergente la iteración de punto fijo? ¿A cuál punto fijo?

2. a. (10%) Sea $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Enuncie el método iterativo de Newton Raphson para aproximar la solución de $f(x) = 0$. Justifique la siguiente afirmación: La iteración de Newton Raphson para $f(x) = 0$ converge únicamente si el punto inicial es la raiz $x = 0$.

b. (10%) Pruebe que la función $f(x) = x - \tan(x)$ tiene una raiz en $[-1.5, 1]$. Encuentre dicha raiz. ¿Cúal es su multiplicidad? ¿Qué tipo de convergencia espera del método de Newton Raphson si lo aplica a este problema con punto inicial $x = -1$?

3. (20%) Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ -s & 1 \end{bmatrix}$$

¿Bajo qué condiciones sobre s convergen las iteraciones de Jacobi y Gauss Seidel?
Ayuda:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

4. Considere el sistema $Ax = b$, con A no singular con diagonal no nula. Deseamos resolver este sistema por un método iterativo, ya sea Jacobi, Gauss Seidel o SOR. Suponga que $A = D - L - U$, donde D es la matriz diagonal con la diagonal de A como diagonal, L es el negativo de la parte estrictamente triangular inferior de A y U es el negativo de la parte estrictamente triangular superior de A.

a. (5%) ¿Qué condición sobre la matriz $D^{-1}(L + U)$ garantiza la convergencia de uno de los tres métodos para cualquier vector inicial? ¿Cuál es el método que tiene que ser convergente en este caso?

b. (10%) Establezca tres condiciones que garantizan la convergencia del método de Gauss Seidel para cualquier vector inicial.

c. (10%) Suponga que $0 < \omega < 2$. Establezca dos condiciones que garantizan la convergencia del método SOR para cualquier vector inicial.

d. (5%) Suponga que se sabe que la iteración de Gauss Seidel converge para cualquier vector inicial pero la iteración de Jacobi no converge para cualquier vector inicial. ¿Puede ser A una matriz estrictamente diagonalmente dominante?

METODOS NUMERICOS 3002192
SEMESTRE 02, 2006, SOLUCION DE PRIMER PARCIAL

1. a. $x = g(x)$ si y solo si $x = -1 + (x+1)^2$ si y solo si $x^2 - 2x - 3 = 0$ si y solo si $x = -1$ o $x = 3$.

   b. Debemos ver que $\max_{x \in I} g(x) \in I$ y $\min_{x \in I} g(x) \in I$. En general no basta con los valores de g en los extremos del intervalo, como ocurre en este caso, pues $g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ y entonces hay un punto crítico en $x = -1$. Como $g''(x) = \frac{1}{2} > 0$ para todo $x \in I$, entonces en dicho punto hay un mínimo.

   $-1 = g(-1) = \min_{x \in I} g(x) \in I$. El máximo está en un extremo pues no hay más puntos críticos.

   $g(-2) = -\frac{3}{4} = g(0) \in I$. Luego $g(x) \in I$ para todo $x \in I$ y se concluye que EXISTE un punto fijo en I.

   c. $g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ es una recta con pendiente $\frac{1}{2}$ que va de $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

   $\max_{x \in I} |g'(x)| = \frac{1}{2} < 1$. Escogemos $K = \frac{1}{2}$ y concluimos que el punto fijo es UNICO.

   d. Si $p_0 = 5$, $p_1 = p_2 = 3$. La iteración converge al punto fijo 3.

   e. Si $p_0 = 3$, $p_1 = p_2 = ... = 3$. La iteración converge al punto fijo 3.

   f. Si $p_0 = -1.5$, por Teorema de Punto Fijo la iteración converge al único punto fijo del intervalo $I = [-2, 0]$ que es -1.

2. a. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ y $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. La iteración de Newton es

   $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - 3x_n = -2x_n$.

   Esta iteración converge a $x = 0$ si $x_0 = 0$ pues se trata de una sucesión constante. Pero si $x_0 \neq 0$, la sucesión es oscilatoria y crece en valor absoluto. Más precisamente, $x_1 = -2x_0$, $x_2 = 4x_0$, $x_3 = -8x_0, ..., x_n = (-2)^n x_0$.

   b. $f(-1.5) = 12.6014$, $f(1) = -0.5574$. Además, en este intervalo f es una función continua pues el intervalo no contiene los puntos donde $\tan(x)$ tiene asíntotas verticales. Por Teorema del Valor Intermedio, existe una raiz de f en este intervalo. Como $f'(x) = 1 - \sec^2(x)$ el único punto crítico de f en el intervalo es $x = 0$. Dicho punto es de inflexión pues $f'(x) \leq 0$ en el intervalo. Aparte de eso, es la única raiz de f en el intervalo.

   Para estudiar orden de convergencia se estudia multiplicidad de la raiz. Como $f'(0) = 0$, la raiz $x = 0$ no es simple y por tanto la convergencia del método de Newton con $x_0 = -1$ es lineal.

3. Basta con que A sea estrictamente diagonalmente dominante, lo cual se consigue con $|s| < 1$.

4. a. La matriz $T_J = D^{-1}(L+U)$ es la matriz de iteración de Jacobi. Con cualquiera de estas condiciones se garantiza convergencia del método de Jacobi:

   i. $\rho(T_J) < 1$

   ii. Alguna de las normas de T_J es menor que 1.

   b. Con cualquiera de estas condiciones se garantiza convergencia del método de Gauss Seidel:

   i. $\rho(T_G) < 1$, donde $T_G = (D-L)^{-1} U$

   ii. Alguna de las normas de T_G es menor que 1.

   iii. A es estrictamente diagonalmente dominante.

   iv. A es simétrica definida positiva.

   c. Con cualquiera de estas condiciones se garantiza convergencia del método SOR:

   i. $\rho(T_w) < 1$, donde $T_w = (D - wL)^{-1}[(1-w)D + wU]$

   ii. Alguna de las normas de T_w es menor que 1.

   iii. A es simétrica definida positiva.

   d. A no puede ser estrictamente diagonalmente dominante, pues si lo fuera tendría que ser convergente el método de Jacobi.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias - Escuela de Matemáticas
PRIMER PARCIAL, MÉTODOS NUMÉRICOS, Marzo 10 de 2007

Nombre: ________________________________Carné: ___________ Grupo: ________

La interpretación del examen hace parte de la evaluación, por tanto no se admiten preguntas.

1. Considere el proceso de iteración de punto fijo $x_{n+1} = g(x_n)$ con $g(x) = \frac{1}{3}x - 5$.
   - (a) (5%) Pruebe que $\alpha = -\frac{15}{2}$ es un punto fijo de g.
   - (b) (10%) Pruebe que $|\alpha - x_{n+1}| = \frac{1}{3}|\alpha - x_n|$ para $n = 0, 1, ...$
   - (c) (5%) Pruebe que $|\alpha - x_{n+1}| = \frac{1}{3^{n+1}}|\alpha - x_0|$ para $n = 0, 1, ...$
   - (d) (5%) Con base en lo anterior, justifique la siguiente afirmación: Esta iteración de punto fijo converge para cualquier aproximación inicial x_0.

2. Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \\ xy &= 1 \end{aligned}$$

   - (a) (5%) Compruebe que las soluciones del sistema son: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
   - (b) (10%) Realice una iteración del método de Newton con primera aproximación $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   - (c) (10%) Justifique el siguiente enunciado: Para este sistema, el método de Newton no se puede aplicar con cualquier aproximación inicial.

3. (25%) Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifique su respuesta.

   Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   - a. _____El sistema $Ax = b$ tiene una única solución.
   - b. _____Si $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces la iteración de Gauss-Seidel para aproximar la solución de $Ax = b$ converge.
   - c. _____$\|A\|_1 = \|A\|_\infty$.
   - d. _____Si las dos componentes de un vector z son iguales, entonces z es una solución de $Ax = b$.
   - e. _____La iteración de Jacobi para aproximar la solución de $Ax = b$ no converge para cualquier vector inicial $x^{(0)}$.

4. Sea $f(x) = e^{2x} - e^x - 2$.
   - a. (10%) Pruebe que f tiene una única raíz en el intervalo $[0, 1]$.
   - b. (5%) Realice una iteración del método de Newton con primera aproximación $x_0 = 0$.
   - c. (10%) Pruebe o refute la afirmación siguiente: Para encontrar esta raíz, el método de Newton converge cuadráticamente.

METODOS NUMERICOS 3002192
SEMESTRE 01, 2007, SOLUCION DEL PARCIAL 1

1. $g(x) = \frac{1}{3}x - 5$

   a. $x = g(x) \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}x - 5 \Leftrightarrow x = -\frac{15}{2}$.

   b. $|\alpha - x_{n+1}| = \left|-\frac{15}{2} - \left(\frac{1}{3}x_n - 5\right)\right| = \left|-\frac{5}{2} - \frac{1}{3}x_n\right| = \dfrac{1}{3}\left|-\frac{15}{2} - x_n\right| = \dfrac{1}{3}|\alpha - x_n|$.

   c. $|\alpha - x_1| = \dfrac{1}{3}|\alpha - x_0|$; $\quad |\alpha - x_2| = \dfrac{1}{3}|\alpha - x_1| = \dfrac{1}{3^2}|\alpha - x_0|$ y asi sucesivamente. Por tanto $|\alpha - x_{n+1}| = \dfrac{1}{3^{n+1}}|\alpha - x_0|$.

   d. $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha - x_{n+1}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^{n+1}}|\alpha - x_0| = 0.$

2. a. $F(X) = \left[x_1^2 + x_2^2 - 2, \quad x_1x_2 - 1\right]^T$; Evaluación de $F(X)$ en $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y en $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ da $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   b. $J(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$; $\quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\quad F\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\quad J\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. El sistema a resolver es $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y su solución es $z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. El nuevo iterado es $x^{(1)} = x^{(0)} + z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

   c. Cuando $x^{(0)}$ tiene las dos componentes iguales, la matriz jacobiana es singular y el método fracasa. Ejemplo, $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$; $J = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   a. V, pues A es no singular. Se puede justificar también calculando su determinante o la única solución del sistema $Ax = b$ que es $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   b. V, $T_G = (D - L)^{-1}U$, donde $D = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 4 \end{bmatrix}$, $\quad L = \begin{bmatrix} & \\ -1 & \end{bmatrix}$, $\quad U = \begin{bmatrix} & -3 \\ & \end{bmatrix}$. Luego $T_G = \begin{bmatrix} & -\frac{3}{2} \\ & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ cuyos valores propios son 0 y $\frac{3}{8}$. Es decir $\rho(T_G) < 1$.

   c. F, $\|A\|_1 = \max\{3, 7\} = 7$ pero $\|A\|_\infty = \max\{5, 5\} = 5$.

   d. F, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ no es solución pues $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   e. F, $T_J = D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & \end{bmatrix}$ con valores propios $\pm\sqrt{\frac{3}{8}}$, por tanto $\rho(T_J) = \sqrt{\frac{3}{8}} < 1$.

4. a. $f(x)$ es continua en $[0, 1]$, $f(0) = -2$ y $f(1) = e^2 - e - 2$. Por tanto $f(0)f(1) < 0$ y por Teorema del Valor Intermedio existe una raíz en $[0, 1]$. Además, $f'(x) = 2e^{2x} - e^x$, se hace cero si $x = -\ln(2) < 0$. Por tanto en $[0, 1]$ no cambia de signo (en realidad es positiva). Esto hace que la función $f(x)$ sea monótona (creciente) en $[0, 1]$ y que la raíz sea única.

   b. $x_1 = 0 - \frac{1-1-2}{2-1} = 2$.

   c. Se sabe que $f'(x) \neq 0$ en $[0, 1]$. Por tanto esta raíz es simple y la convergencia es cuadrática.

Universidad Nacional de Colombia |
Escuela de Matemáticas, 17 de septiembre de 2007
Primer Examen Parcial de Métodos Numéricos **(20%)**
Duración: 1 hora y 50 minutos

Nombre: ________________________________Carné: ___________ Grupo: ____

1. La ecuación $f(x) = \sin(x) - e^{-x} = 0$ tiene infinitas raices y se desea aproximar la menor raiz positiva.

   a. (5%) Pruebe que esta ecuación tiene una única raiz en el intervalo $[0,1]$, llamémosla p.

   b. (5%) Si aplicamos el método de bisección con $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, encontramos una sucesión de aproximaciones c_k, $k = 0, 1, ...$ Sin tener que calcular las iteraciones encuentre el menor n tal que $|p - c_n| \leq 10^{-4}$.

   c. (5%) Escriba la fórmula de iteración de Newton para aproximar la raiz p.

   d. (10%) ¿Cuál es el orden de convergencia del método de Newton en este caso? Justifique su respuesta.

   e. Sea $g(x) = sen^{-1}(e^{-x})$ definida en $I = [0.5, 0.7]$. Verifique:
   i. (10%) $f(x) = 0$ si y solo si $x = g(x)$. Además, las funciones g y g' son continuas en I.
   ii. (10%) Si $x \in I$, entonces $g(x) \in I$ y existe una constante K tal que $|g'(x)| \leq K < 1$.
   (5%) ¿Qué puede afirmar sobre puntos fijos de la función g y sobre la iteración de punto fijo $p_n = g(p_{n-1})$ para cualquier aproximación inicial $p_0 \in I$?
   AYUDA: $g'(x) = \dfrac{-1}{[e^{2x} - 1]^{\frac{1}{2}}}, \qquad g''(x) = \dfrac{e^{2x}}{[e^{2x} - 1]^{\frac{3}{2}}}.$

2. Considere el sistema lineal $Ax = b$ donde $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 5 & -10 & 2 & -6 \\ 5 & -9 & 15 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si conocemos que:

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{3} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix} \quad T_G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{19}{20} & \frac{-11}{10} \\ 0 & \frac{-1}{60} & \frac{7}{100} & \frac{11}{150} \\ 0 & \frac{-19}{150} & \frac{-97}{250} & \frac{119}{375} \end{bmatrix} \quad T_{S_{w=0.9}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{9}{20} & \frac{27}{20} & \frac{-9}{10} \\ \frac{9}{200} & \frac{121}{400} & \frac{63}{80} & \frac{-189}{200} \\ \frac{-57}{10000} & \frac{139}{4903} & \frac{481}{4000} & \frac{415}{3467} \\ \frac{-103}{4565} & \frac{-244}{2309} & \frac{-417}{1376} & \frac{263}{735} \end{bmatrix}$$

con espectros:

$$\{-0.10365, 0.83645, -0.3664 + 0.56520i, -0.3664 - 0.56520i\} \text{ para } T_J$$
$$\left\{0.57072, 0.15630, -8.9684 \times 10^{-2}, 0\right\} \text{ para } T_G$$
$$\left\{2.0606 \times 10^{-2}, 0.68060, 5.9469 \times 10^{-2}, 0.1199\right\} \text{ para } T_{S_{w=0.9}}$$

a. (10%) Encuentre $\|T_J\|_1$ y $\|T_G\|_\infty$.

b. (5%) ¿Qué puede decir sobre la convergencia del método de Jacobi?

c. (5%) ¿Qué puede decir sobre la convergencia del método de Gauss-Seidel?

d. (5%) ¿Qué puede decir sobre la convergencia del método de SOR?

3. (5%) El método de bisección aplicado a la función $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$ en el intervalo $[-2,3]$:
   a. Converge a la raiz $p_1 = -1$. b. Converge a la raiz $p_2 = 1$.
   c. Converge a la raiz $p_3 = 2$. d. Puede converger a cualquiera de las raices.

4. (5%) Si se utiliza el método de Newton para el sistema no lineal $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0 \\ 3xy^2 - x^3 - 1 = 0 \end{cases}$ con primera aproximación $(p_0, q_0) = (1,1)$, la matriz jacobiana $J(p_0, q_0)$ es
   a. $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

5. (5%) Para el método iterativo de Jacobi para resolver un sistema lineal, la matriz de iteración es $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces es falso que:
   a. El método de Jacobi converge.
   b. El método de Jacobi no converge para todo vector inicial.
   c. El número 0 es un valor propio de T.
   d. El radio espectral de T es $\sqrt{2}$.

6. (5%) Los puntos fijos de $g(x) = -4 + 4x - \frac{1}{2}x^2$ son:
   a. -2 y 4. b. 2 y -4. c. -2 y -4. d. 2 y 4.

7. (5%) Se usa método de Newton para aproximar la raiz $(1,1)$ del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$. Entonces:
   a. La iteración con $(p_0, q_0) = (1.1, 1.1)$ converge.
   b. La iteración con $(p_0, q_0) = (1.1, 1.1)$ diverge.
   c. Para toda aproximación inicial (p_0, q_0), la matriz jacobiana $J(p_0, q_0)$ es no singular.
   d. Ninguna de las anteriores.

Solución Primer Parcial de Métodos Numéricos 02-2007

1. La ecuación $f(x) = \sin(x) - e^{-x} = 0$ tiene infinitas raices y se desea aproximar la menor raiz positiva.

   a. f es continua en todo $\mathbb{R}$ (trigonométrica y exponencial), en particular en el intervalo $[0, 1]$

   $f(0) = -1$ y $f(1) = 0.4736$, por TVI, el cero existe

   como $f'(x) = \cos(x) + e^{-x} > 0$, f es creciente y por tanto el cero es único.

   b. $|p - c_n| \leq \dfrac{1-0}{2^{n+1}} \leq 10^{-4}$ lo que implica $13.2877 = \dfrac{\ln(10^4)}{\ln(2)} \leq n + 1$. El menor n que cumple que $|p - c_n| \leq 10^{-4}$ es $\mathbf{n = 13}$.

   c. $x_n = x_{n-1} - \dfrac{\sin(x_{n-1}) - e^{-x_{n-1}}}{\cos(x_{n-1}) + e^{-x_{n-1}}}$.

   d. f' no se anula en el intervalo $[0, 1]$, por tanto no tiene ceros múltiples y esto indica que la raiz es **simple** y que la convergencia es **cuadrática**.

   e. Sea $g(x) = \arcsin(e^{-x})$ definida en $I = [0.5, 0.7]$.

      i. $f(x) = 0$ si y solo si $\sin(x) = e^{-x}$ si y solo si $x = \arcsin(e^{-x})$ si y solo si $x = g(x)$.

      Las funciones g y g' son continuas en el intervalo pues son cocientes de continuas

      con denominadores que no se anulan.

      ii. $g'(x) < 0$ en I, luego g es decreciente y asi $0.5197 = g(0.7) \leq g(x) \leq g(0.5) = 0.6517$

      lo cual indica $g(x) \in I$.

      $g''(x) > 0$ en I, luego g' es creciente en I y asi $-0.762 = g'(0.5) \leq g'(x) \leq g'(0.7) = -0.5721$.

      El número $K = 0.77$ es tal que $|g'(x)| \leq K < 1$.

      Por TFPF existe un único punto fijo p de g en I y la iteración $p_n = g(p_{n-1})$ converge a p

      para cualquier aproximación inicial $p_0 \in I$.

2. a. $\|T_J\|_1 = \max\{1.0333, 1.2, 1.8, 2\} = 2$

   $\|T_G\|_\infty = \max\{3, 2.3, 0.16, 0.8320\} = 3$.

   b. Como $\rho(T_J) = 0.83645 < 1$, el método de Jacobi converge.

   c. Como $\rho(T_G) = 0.57072 < 1$, el método de Gauss-Seidel converge.

   d. El método SOR converge pues $\rho(T_w) = 0.68060 < 1$.

3. Rta: Converge a la raiz $p_1 = -1$.

4. Rta: $J(p_0, q_0) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

5. Rta: Es falso que: El método de Jacobi converge.

6. Rta: Los puntos fijos de $g(x)$ son 2 y 4.

7. Rta: Ninguna de las anteriores.

SOLUCION PRIMER PARCIAL TEORICO DE METODOS NUMERICOS

$\boxed{1.}$ (10 %) De los intervalos siguientes, el único en el que es posible aplicar el método de bisección para la función $f(x) = \tan^{-1}(e^x) - 8\cos(x)$ es:

a. $[-3, -2]$ $\boxed{\text{b}}$. $[-2, -1]$ c. $[-1, 0]$ d. $[0, 1]$.

Calcule las 2 primeras aproximaciones dadas por el método de bisección.

Solución: La función f es continua en todo $\mathbb{R}$. Ahora buscamos en que intervalo hay cambio de signo:

$$f(-3) = \tan^{-1}(e^{-3}) - 8\cos(-3) \approx 7.9667$$
$$f(-2) = \tan^{-1}(e^{-2}) - 8\cos(-2) \approx 3.4637$$
$$f(-1) = \tan^{-1}(e^{-1}) - 8\cos(-1) \approx -3.9699$$

Hay cambio de signo en el intervalo $[-2, -1]$

n	a_n +	b_n -	p_n	$f(p_n)$
1	-2	-1	-1.5	-0.3464
2	-2	-1.5	-1.75	

Las 2 primeras aproximaciones son $p_1 = -1.5$ y $p_2 = -1.75$.

$\boxed{1.}$ (10 %) De los intervalos siguientes, el único en el que es posible aplicar el método de bisección para la función $f(x) = \tan^{-1}(e^x) - 8\,\text{sen}(x)$ es:

a. $[-2, -1]$ b. $[-1, 0]$ $\boxed{\text{c}}$. $[0, 1]$ d. $[1, 2]$.

Calcule las 2 primeras aproximaciones dadas por el método de bisección.

Solución: La función f es continua en todo $\mathbb{R}$. Ahora buscamos en que intervalo hay cambio de signo:

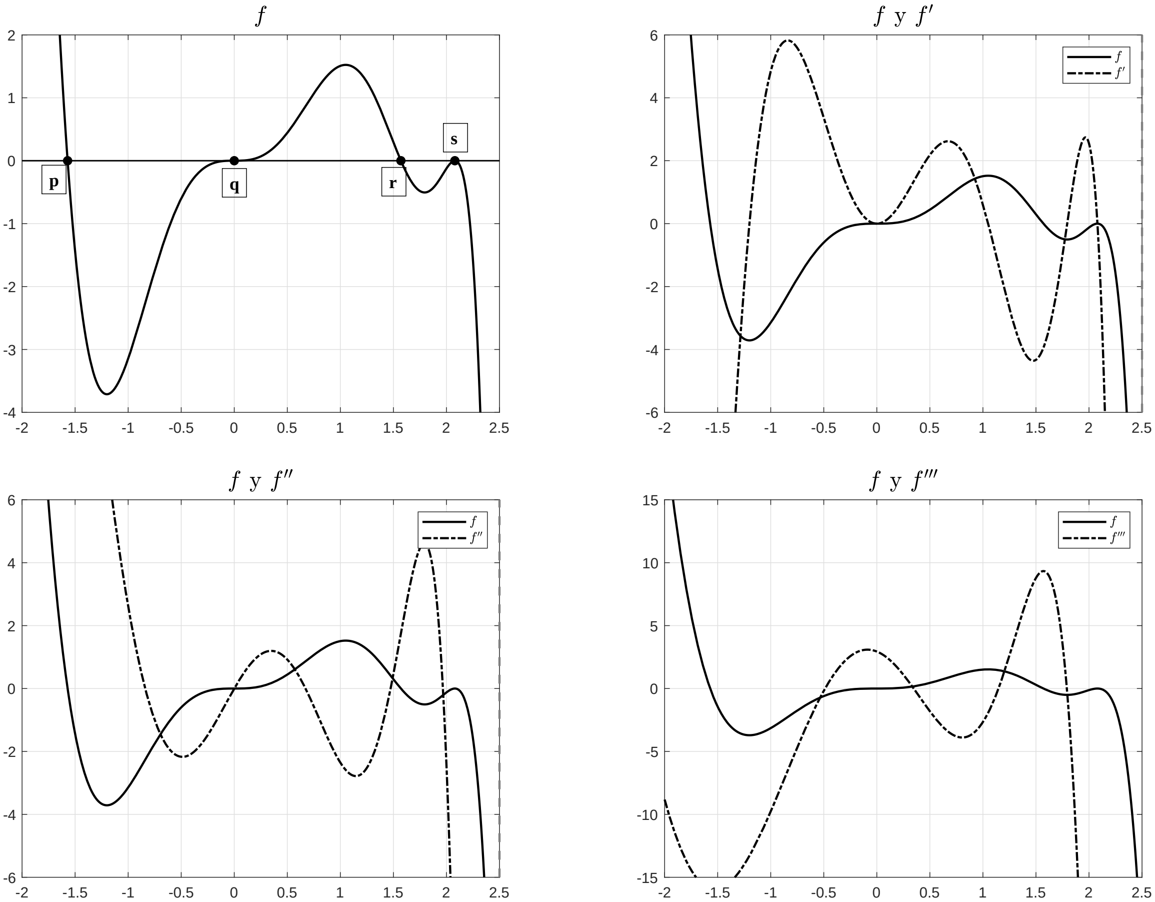
$$f(-2) = \tan^{-1}(e^{-2}) - 8\,\text{sen}(-2) \approx 7.4089$$
$$f(-1) = \tan^{-1}(e^{-1}) - 8\,\text{sen}(-1) \approx 7.0843$$
$$f(0) = \tan^{-1}(e^{0}) - 8\,\text{sen}(0) \approx 0.7854$$
$$f(1) = \tan^{-1}(e^{1}) - 8\,\text{sen}(1) \approx -5.5135$$

Hay cambio de signo en el intervalo $[-1, 0]$

n	a_n +	b_n -	p_n	$f(p_n)$
1	0	1	0.5	-2.8098
2	0	0.5	0.25	

Las 2 primeras aproximaciones son $p_1 = 0.5$ y $p_2 = 0.25$.

2. Consideremos el problema de aproximar los ceros la función $f \in \mathcal{C}^3([-2, 2.5])$.



Justificar sus respuestas.

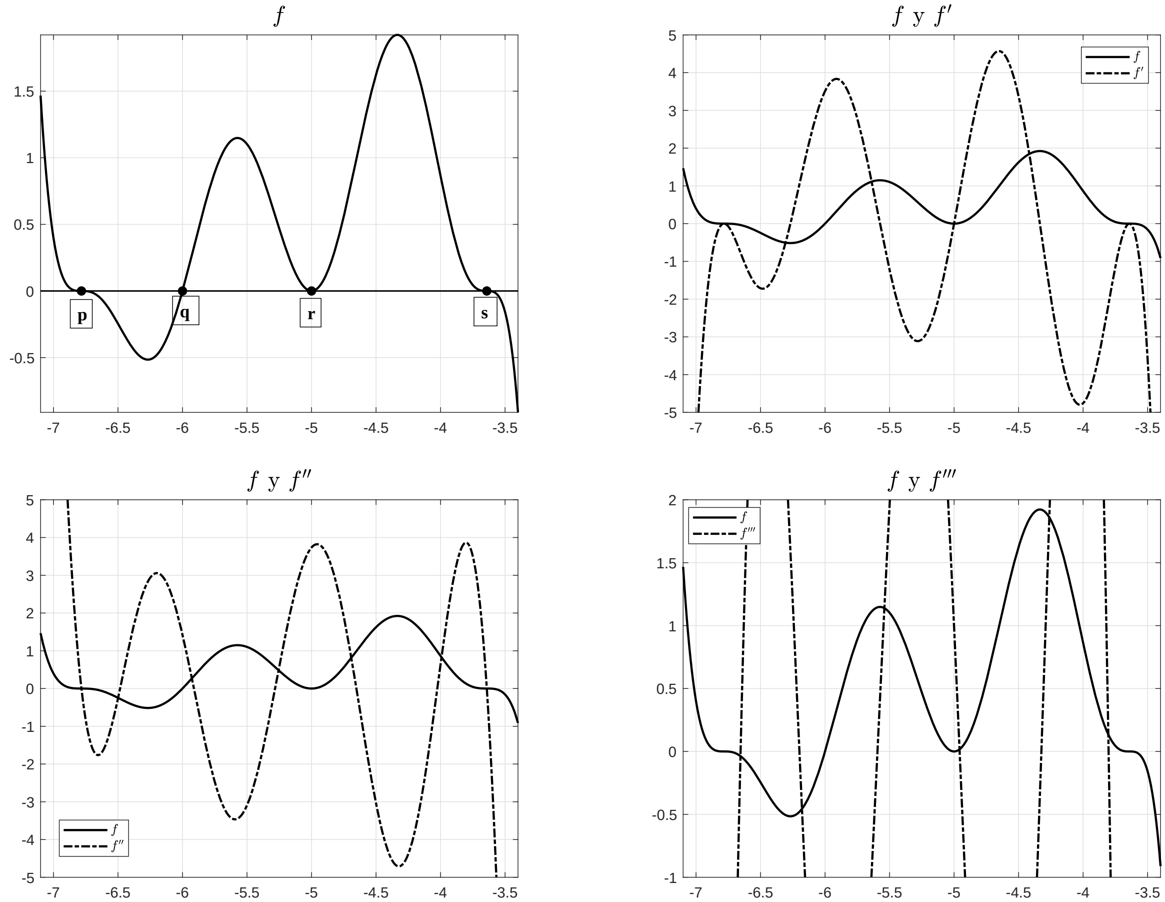
a. (4 %) La función f tiene $\boxed{2}$ ceros múltiples en $[-2, 2.5]$ y $\boxed{2}$ ceros simples en $[-2, 2.5]$.
b. (8 %) ¿Cuáles son las multiplicidades de los ceros de f en $[-2, 2.5]$? Señalar y nombrar en la gráfica de f sus ceros, clasificando sus multiplicidades.
Solución:

- p es un cero de multiplicidad 1 ya que $f'(p) \neq 0$.
- q es un cero de multiplicidad 3 ya que $f'(q) = 0,\ f''(q) = 0,\ f'''(q) \neq 0$.
- r es un cero de multiplicidad 1 ya que $f'(r) \neq 0$.
- s es un cero de multiplicidad 2 ya que $f'(s) = 0,\ f''(s) \neq 0$.

c. (8 %) Sí se usa el método de Newton para aproximar los ceros de la función f en $[-2, 2.5]$, con una aproximación inicial adecuada, entonces ¿cuáles son los órdenes de convergencia de las sucesiones generadas a partir de la iteración de Newton?
Solución: Sabemos que el método de Newton converge, con una aproximación inicial adecuada, cuadráticamente para raíces simples y linealmente para raíces para múltiples.
Por lo tanto, las sucesiones generadas por la iteración de Newton converge

- cuadráticamente para p y s,
- linealmente para q y r.

$\boxed{2.}$ Consideremos el problema de aproximar los ceros la función $f \in \mathcal{C}^3([-7.1, -3.4])$.



Justificar sus respuestas.

a. (4 %) La función f tiene $\boxed{3}$ ceros múltiples en $[-7.1, -3.4]$ y $\boxed{1}$ ceros simples en $[-7.1, -3.4]$.
b. (8 %) ¿Cuáles son las multiplicidades de los ceros de f en $[-7.1, -3.4]$? Señalar y nombrar en la gráfica de f sus ceros, clasificando sus multiplicidades.
Solución:

- p es un cero de multiplicidad 3 ya que $f'(p) = 0,\ f'(p) = 0,\ f'''(p) \neq 0$.
- q es un cero de multiplicidad 1 ya que $f'(q) \neq 0$.
- r es un cero de multiplicidad 2 ya que $f'(r) = 0,\ f''(r) \neq 0$.
- s es un cero de multiplicidad 3 ya que $f'(s) = 0,\ f''(s) = 0,\ f'''(s) \neq 0$.

c. (8 %) Sí se usa el método de Newton para aproximar los ceros de la función f en $[-7.1, -3.4]$, con una aproximación inicial adecuada, entonces ¿cuáles son los órdenes de convergencia de las sucesiones generadas a partir de la iteración de Newton?
Solución: Sabemos que el método de Newton converge, con una aproximación inicial adecuada, cuadráticamente para raíces simples y linealmente para raíces para múltiples.
Por lo tanto, las sucesiones generadas por la iteración de Newton converge

- cuadráticamente para q,
- linealmente para p, r y s.

$\boxed{3.}$ (20 %) Considerar la función $g(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{e^{-x}}{4-x^2}\right)$, cuyas dos primeras derivadas son $g'(x) = -\dfrac{x^2+2x-4}{4(x^2-4)}$ y $g''(x) = \dfrac{x^2+4}{2(x^2-4)^2}$. Utilice el Teorema de Existencia y Unicidad de Punto Fijo (T.E.U.P.F.) para demostrar que la función g tiene un único punto fijo $p \in [-1, 1.5]$. Si tomamos como aproximación inicial $p_0 = -0.8$ (o $p_0 = -0.3$), ¿Cuántas iteraciones n son necesarias para que $|p_n - p| < 10^{-4}$.

Solución: Para demostrar que g tiene un único punto fijo en $[-1, 1.5]$, verifiquemos que g satisface las hipótesis del T.E.U.P.F.

- ⋆ $g \in \mathcal{C}[-1, 1.5]$: g es una función continua cuando $4-x^2 \neq 0$ y $\dfrac{e^{-x}}{4-x^2} > 0$. Esto es, $x \neq \pm 2$, $e^{-x} > 0$ y $4-x^2 > 0$ (en vista que e^{-x} siempre es positiva); $4-x^2 > 0$ si $x \in (-2, 2)$. En particular, g es continua en $[-1, 1.5]$ ($[-1, 1.5] \subset (-2, 2)$)✓

- ⋆ $g(x) \in [-1, 1.5]$, $\forall x \in [-1, 1.5]$: para garantizar que las imágenes caen en $[-1, 1.5]$, podemos usar el T.V.E. ya que g es continua en un intervalo cerrado. Busquemos el valor máximo y mínimo de g en $[-1, 1.5]$:
  Números críticos: valores de $x \in [-1, 1.5]$ donde $g'(x) = 0$ o $g'(x)$ no esta definida. Dado que
  $$g'(x) = -\frac{x^2+2x-4}{4(x^2-4)}$$
  g' no existe cuando $x^2 - 4 = 0$, esto es en $x = \pm 2 \notin [-1, 1.5]$ y $g'(x) = 0$ cuando $x^2 + 2x - 4 = 0$, esto es en $x_1 = -1-\sqrt{5} \approx -3.2361 \notin [-1, 1.5]$ y $x_2 = -1+\sqrt{5} \approx 1.2361 \in [-1, 1.5]$, así sus valores extremos son
  $$\left.\begin{array}{l} g(-1) \approx -0.0247 \text{ máximo} \\ g(x_2) \approx -0.5353 \text{ mínimo} \\ g(1.5) \approx -0.5149 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} -0.5353 \leq g(x) \leq -0.0247 \ \text{ esto es,} \\ g(x) \in [-0.5353, -0.0247] \subset [-1, 1.5],\ \forall x \in [-1, 1.5] \ ✓ \end{array}$$

- ⋆ g' existe en $(-1, 1.5)$ y existe $k \in (0, 1)$ tal que $|g'(x)| \leq 1$ para todo $x \in (-1, 1.5)$: g' existe en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, en particular en $(-1, 1.5)$. Para hallar la constante k, dado que g' es continua en $[-1, 1.5]$, nuevamente emplearemos el T.V.E. para obtener los valores extremos de g' en $[-1, 1.5]$:
  Números críticos: valores de $x \in [-1, 1.5]$ donde $g''(x) = 0$ o $g''(x)$ no esta definida. Dado que
  $$g''(x) = \frac{x^2+4}{2(x^2-4)^2}$$
  g'' no existe cuando $x^2 - 4 = 0$, esto es en $x = \pm 2 \notin [-1, 1.5]$ y g'' nunca será cero ya que $x^2 + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En este caso g' es creciente en $[-1, 1.5]$, por lo tanto sus valores extremos se alcanzan en los extremos del intervalo
  $$\left.\begin{array}{l} g'(-1) = -\frac{5}{12} \approx -0.4167 \text{ mínimo} \\ g'(1.5) = \frac{5}{28} \approx 0.1786 \text{ máximo} \end{array}\right\} \quad -0.4167 \leq g'(x) \leq 0.1786 \ \text{ por lo tanto, } |g'(x)| \leq 0.4167,\ \forall x \in [-1, 1.5],$$
  en particular, $|g'(x)| \leq 0.4167$, $\forall x \in (-1, 1.5)$ ✓

Gracias al T.E.U.P.F. podemos concluir que g tiene un único punto fijo $p \in [-1, 1.5]$.
Ahora, para *estimar* el número de iteraciones n, utilizamos la cota del teorema de convergencia P.F. Del análisis anterior, tenemos que $k = 0.4167$, así $|p_n - p| \leq 10^{-4}$ si $k^n \text{ máx}\{b - p_0, p_0 - a\} \leq 10^{-4}$.

- Tomando $p_0 = -0.8$ obtenemos
  $$0.4167^n \text{ máx}\{1.5 + 0.8, -0.8 + 1\} \leq 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad 0.4167^n \leq \frac{1}{2.3 \times 10^4} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{23000}\right)}{\ln(0.4167)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 11.4729$$
  y dado que n es un número iteraciones, el número estimado de iteraciones son $n = 12$.

- Tomando $p_0 = -0.3$ obtenemos
  $$0.4167^n \text{ máx}\{1.5 + 0.3, -0.3 + 1\} \leq 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad 0.4167^n \leq \frac{1}{1.8 \times 10^4} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{18000}\right)}{\ln(0.4167)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 11.1929$$
  y dado que n es un número iteraciones, el número estimado de iteraciones son $n = 12$.

$\boxed{3.}$ (20 %) Considerar la función $g(x) = -2\ln\left(\dfrac{e^{-x}}{x^2-9}\right)$, cuyas dos primeras derivadas son $g'(x) = \dfrac{2x^2+4x-18}{x^2-9}$ y $g''(x) = -\dfrac{4x^2+36}{(x^2-9)^2}$. Utilice el Teorema de Existencia y Unicidad de Punto Fijo (T.E.U.P.F.) para demostrar que la función g tiene un único punto fijo $p \in [-5.5, -4]$. Si tomamos como aproximación inicial $p_0 = -4.8$ (o $p_0 = -5.1$), ¿Cuántas iteraciones n son necesarias para que $|p_n - p| < 10^{-3}$.

Solución: Para demostrar que g tiene un único punto fijo en $[-5.5, -4]$, verifiquemos que g satisface las hipótesis del T.E.U.P.F.

- ⋆ $g \in \mathcal{C}[-5.5, -4]$: g es una función continua cuando $x^2 - 9 \neq 0$ y $\dfrac{e^{-x}}{x^2-9} > 0$. Esto es, $x \neq \pm 3$, $e^{-x} > 0$ y $x^2 - 9 > 0$ (en vista que e^{-x} siempre es positiva); $x^2 - 9 > 0$ si $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. En particular, g es continua en $[-5.5, -4]$ ($[-5.5, -4] \subset (-\infty, -3)$)✓

- ⋆ $g(x) \in [-5.5, -4]$, $\forall x \in [-5.5, -4]$: para garantizar que las imágenes caen en $[-5.5, -4]$, podemos usar el T.V.E. ya que g es continua en un intervalo cerrado. Busquemos el valor máximo y mínimo de g en $[-5.5, -4]$:
  Números críticos: valores de $x \in [-5.5, -4]$ donde $g'(x) = 0$ o $g'(x)$ no esta definida. Dado que
  $$g'(x) = \frac{2x^2+4x-18}{x^2-9}$$
  g' no existe cuando $x^2 - 9 = 0$, esto es en $x = \pm 3 \notin [-5.5, -4]$ y $g'(x) = 0$ cuando $2x^2 + 4x - 18 = 0$, esto es en $x_1 = -1 + \sqrt{10} \approx 2.1623 \notin [-5.5, -4]$ y $x_2 = -1 - \sqrt{10} \approx -4.1623 \in [-5.5, -4]$, así sus valores extremos son
  $$\left.\begin{array}{l} g(-5.5) \approx -4.8873 \text{ mínimo} \\ g(x_2) \approx -4.0861 \text{ máximo} \\ g(-4) \approx -4.1082 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} -4.8873 \leq g(x) \leq -4.0861 \text{ esto es,} \\ g(x) \in [-4.8873, -4.0861] \subset [-5.5, -4],\ \forall x \in [-5.5, -4] \ ✓ \end{array}$$

- ⋆ g' existe en $(-5.5, -4)$ y existe $k \in (0, 1)$ tal que $|g'(x)| \leq 1$ para todo $x \in (-5.5, -4)$: g' existe en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, en particular en $(-5.5, -4)$. Para hallar la constante k, dado que g' es continua en $[-5.5, -4]$, nuevamente emplearemos el T.V.E. para obtener los valores extremos de g' en $[-5.5, -4]$:
  Números críticos: valores de $x \in [-5.5, -4]$ donde $g''(x) = 0$ o $g''(x)$ no esta definida. Dado que
  $$g''(x) = -\frac{4x^2+36}{(x^2-9)^2}$$
  g'' no existe cuando $x^2 - 9 = 0$, esto es en $x = \pm 3 \notin [-5.5, -4]$ y g'' nunca será cero ya que $4x^2 + 36 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En este caso g' es creciente en $[-5.5, -4]$, por lo tanto sus valores extremos se alcanzan en los extremos del intervalo
  $$\left.\begin{array}{l} g'(-5.5) \approx 0.9647 \text{ mínimo} \\ g'(-4) \approx -0.2857 \text{ máximo} \end{array}\right\} \quad -0.2857 \leq g'(x) \leq 0.9647 \text{ por lo tanto, } |g'(x)| \leq 0.9647\, \forall x \in [-5.5, -4],$$
  en particular, $|g'(x)| \leq 0.4167$, $\forall x \in (-5.5, -4)$ ✓

Gracias al T.E.U.P.F. podemos concluir que g tiene un único punto fijo $p \in [-5.5, -4]$.
Ahora, para *estimar* el número de iteraciones n, utilizamos la cota del teorema de convergencia P.F. Del análisis anterior, tenemos que $k = 0.9647$, así $|p_n - p| \leq 10^{-4}$ si k^n máx$\{b - p_0, p_0 - a\} \leq 10^{-3}$.

- Tomando $p_0 = -4.8$ obtenemos
  $$0.9647^n \text{ máx}\{-4 + 4.8, -4.8 + 5.5\} \leq 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 0.9647^n \leq \frac{1}{0.8 \times 10^3} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{800}\right)}{\ln(0.9647)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 186.0034$$
  y dado que n es un número iteraciones, el número estimado de iteraciones son $n = 187$.

- Tomando $p_0 = -5.1$ obtenemos
  $$0.9647^n \text{ máx}\{-4 + 5.1, -5.1 + 5.5\} \leq 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 0.9647^n \leq \frac{1}{1.1 \times 10^3} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{1100}\right)}{\ln(0.9647)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 194.8646$$
  y dado que n es un número iteraciones, el número estimado de iteraciones son $n = 195$.

$\boxed{4.}$ Se desea encontrar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(y) + x^2 y + e^{x-y}\ .$$

a. (6 %) Plantee el problema a resolver. Más precisamente, escriba el sistema no lineal de ecuaciones en su forma vectorial, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. (Definir claramente el vector $\mathbf{X}$ y la función vectorial $\mathbf{F}$).

Solución: Para hallar los puntos críticos de la función de varias variables debemos buscar cuando sus derivadas parciales son iguales a cero, esto es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\ \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{sen}(y) + 2xy + e^{x-y} = 0 \\ x\cos(y) + x^2 - e^{x-y} = 0 \end{array}$$

Para escribir el sistema no lineal de ecuaciones en su forma vectorial definimos el vector de incognitas $\mathbf{X}$ y la función vectorial $\mathbf{F}$ así

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(y) + 2xy + e^{x-y} \\ x\cos(y) + x^2 - e^{x-y} \end{bmatrix}$$

b. (10 %) Escriba la fórmula de iteración matricial del método de Newton para **este** sistema.

Solución: La ecuación de iteración de Newton esta dada por $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \left[\mathbf{JF}(\mathbf{X}^{(k)})\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})\,, \qquad k = 0, 1, \ldots.$
Calculemos primero $\mathbf{JF}$

$$\mathbf{JF}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 2y + e^{x-y} & \cos(y) + 2x - e^{x-y} \\ \cos(y) + 2x - e^{x-y} & -x\,\mathrm{sen}(y) + e^{x-y} \end{bmatrix}$$

Así, la fórmula de iteración matricial del método de Newton para **este** sistema es

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 2y^{(k)} + e^{x^{(k)}-y^{(k)}} & \cos(y^{(k)}) + 2x^{(k)} - e^{x^{(k)}-y^{(k)}} \\ \cos(y^{(k)}) + 2x^{(k)} - e^{x^{(k)}-y^{(k)}} & -x^{(k)}\,\mathrm{sen}(y^{(k)}) + e^{x^{(k)}-y^{(k)}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(y^{(k)}) + 2x^{(k)}y^{(k)} + e^{x^{(k)}-y^{(k)}} \\ x^{(k)}\cos(y^{(k)}) + (x^{(k)})^2 - e^{x^{(k)}-y^{(k)}} \end{bmatrix}$$

$\boxed{4.}$ Se desea encontrar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x\cos(y) + xy^2 + e^{y-x}\ .$$

a. (6 %) Plantee el problema a resolver. Más precisamente, escriba el sistema no lineal de ecuaciones en su forma vectorial, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. (Definir claramente el vector $\mathbf{X}$ y la función vectorial $\mathbf{F}$).

Solución: Para hallar los puntos críticos de la función de varias variables debemos buscar cuando sus derivadas parciales son iguales a cero, esto es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\ \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \cos(y) + y^2 - e^{y-x} = 0 \\ -x\,\mathrm{sen}(y) + 2xy + e^{y-x} = 0 \end{array}$$

Para escribir el sistema no lineal de ecuaciones en su forma vectorial definimos el vector de incognitas $\mathbf{X}$ y la función vectorial $\mathbf{F}$ así

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \cos(y) + y^2 - e^{y-x} \\ -x\,\mathrm{sen}(y) + 2xy + e^{y-x} \end{bmatrix}$$

b. (10 %) Escriba la fórmula de iteración matricial del método de Newton para **este** sistema.

Solución: La ecuación de iteración de Newton para el sistema de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ esta dada por La ecuación de iteración de Newton esta dada por $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \left[\mathbf{JF}(\mathbf{X}^{(k)})\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})\,, \qquad k = 0, 1, \ldots.$
Calculemos primero $\mathbf{JF}$

$$\mathbf{JF}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} e^{y-x} & -\mathrm{sen}(y) + 2y - e^{y-x} \\ -\mathrm{sen}(y) + 2y - e^{y-x} & -x\cos(y) + 2x + e^{y-x} \end{bmatrix}$$

Así, la fórmula de iteración matricial del método de Newton para **este** sistema es

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} e^{y^{(k)}-x^{(k)}} & -\mathrm{sen}(y^{(k)}) + 2y^{(k)} - e^{y^{(k)}-x^{(k)}} \\ -\mathrm{sen}(y^{(k)}) + 2y^{(k)} - e^{y^{(k)}-x^{(k)}} & -x^{(k)}\cos(y^{(k)}) + 2x^{(k)} + e^{y^{(k)}-x^{(k)}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(y^{(k)}) + (y^{(k)})^2 - e^{y^{(k)}-x^{(k)}} \\ -x^{(k)}\,\mathrm{sen}(y^{(k)}) + 2x^{(k)}y^{(k)} + e^{y^{(k)}-x^{(k)}} \end{bmatrix}$$

$\boxed{5.}$ Considere el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Justificar sus respuestas.

a. (8 %) Sabemos que el espectro de $\mathbf{A}$ esta dado por $\sigma(\mathbf{A}) = \{1.3136, 6.9261, 11.76025\}$. ¿Qué puede decir sobre la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR con parámetro $0 < \omega < 2$?

Solución: La matriz $\mathbf{A}$ es simetrica y todos sus valores propios son positivos, por lo tanto podemos concluir $\mathbf{A}$ es definida positiva. Y sabemos que si $\mathbf{A}$ es definida positiva, por teorema, la sucesión generada por la iteración de SOR converge para todo $\omega \in (0, 2)$, en particular para $\omega = 1$ tenemos convergencia y por tanto la sucesión generada por la iteración de Gauss-Seidel tambien converge. Adicionalmente, como $\mathbf{A}$ es una matriz tridiagonal, por teorema sucesión generada por la iteración de Jacobi tambien converge.

b. Si $\sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{J}}) = \{-0.786, 0, 0.786\}$ halle:

(i) (5 %) $\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{J}}) = \underline{\text{máx}\{|\lambda| \, : \, \lambda \in \sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{J}})\} = 0.786}$

(ii) (5 %) $\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{GS}}) = [\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{J}})]^2 \approx 0.6178$

(iii) (8 %) El parámetro óptimo $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{opt}}$ para usar el método de S.O.R. $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{opt}} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{J}_{\mathrm{J}}})]^2}} \approx 1.2359.$

c. (8 %) Escribir la ecuación de iteración (escalar) para hallar los valores de $x_2^{(k+1)}$ que se obtiene al emplear el método de S.O.R. con el parámetro óptimo $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{opt}}$ obtenido en (iii) para **este** sistema.

$$x_2^{(k+1)} = 1.2359 \left(\frac{15}{7} + \frac{3}{7} x_1^{(k+1)} - \frac{4}{7} x_3^{(k)} \right) + (1 - 1.2359)\, x_2^{(k)} = 1.2359 \left(\frac{15}{7} + \frac{3}{7} x_1^{(k+1)} - \frac{4}{7} x_3^{(k)} \right) - 0.2359\, x_2^{(k)}$$

$\boxed{5.}$ Considere el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ -11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Justificar sus respuestas.

a. (8 %) Sabemos que el espectro de $\mathbf{A}$ esta dado por $\sigma(\mathbf{A}) = \{0.5015, 6.5986, 13.8999\}$. ¿Qué puede decir sobre la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR con parámetro $0 < \omega < 2$?

Solución: La matriz $\mathbf{A}$ es simetrica y todos sus valores propios son positivos, por lo tanto podemos concluir $\mathbf{A}$ es definida positiva. Y sabemos que si $\mathbf{A}$ es definida positiva, por teorema, la sucesión generada por la iteración de SOR converge para todo $\omega \in (0, 2)$, en particular para $\omega = 1$ tenemos convergencia y por tanto la sucesión generada por la iteración de Gauss-Seidel tambien converge. Adicionalmente, como $\mathbf{A}$ es una matriz tridiagonal, por teorema sucesión generada por la iteración de Jacobi tambien converge.

b. Si $\sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{GS}}) = \{0, 0.854, 0\}$ halle:

(i) (5 %) $\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{GS}}) = \underline{\text{máx}\{|\lambda| \, : \, \lambda \in \sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{GS}})\} = 0.854}$

(ii) (5 %) $\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{J}}) = \underline{\sqrt{\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{GS}})} \approx 0.9241}$

(iii) (8 %) El parámetro óptimo $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{opt}}$ para usar el método de S.O.R. $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{opt}} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathbf{T}_{\mathrm{J}_{\mathrm{GS}}})}} \approx 1.4471$

c. (8 %) Escribir la ecuación de iteración (escalar) para hallar los valores de $x_2^{(k+1)}$ que se obtiene al emplear el método de S.O.R. con el parámetro óptimo $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{opt}}$ obtenido en (iii) para **este** sistema.

$$x_2^{(k+1)} = 1.4471 \left(-\frac{11}{7} - \frac{4}{7} x_1^{(k+1)} + \frac{5}{7} x_3^{(k)} \right) + (1 - 1.4471)\, x_2^{(k)} = 1.4471 \left(-\frac{11}{7} - \frac{4}{7} x_1^{(k+1)} + \frac{5}{7} x_3^{(k)} \right) - 0.4471\, x_2^{(k)}$$