Catálogo

FORMULAS

- Identidad del Paralelogramo:

$$\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|X \cdot Y| \leq \|X\|\|Y\|$$

- Desigualdad triangular:

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

- Teorema de Pitágoras:

$$\|X-Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$$

- Proyección Ortogonal

$$P_{\mathcal{L}_U}(X) = P_U(X) = \frac{X \cdot U}{\|U\|^2} U$$

- Descomposición Ortogonal

$$X = P_U(X) + P_{U^\perp}(X)$$

- Recta generada por A y B:

$$\mathcal{L}_{AB} = \{X : X = sA + tB, s, t \in \mathbb{R}, s+t = 1\}$$

- Semiplano a la izquierda de $\mathcal{L}_{AB}$:

$$\mathcal{L}^+_{\overrightarrow{AB}} = \{X \in \mathbb{R}^2 : (B-A)^\perp \cdot (X-A) > 0\}$$

- El ángulo $\angle(BAC)$ es
  - $\overline{\mathcal{L}}^+_{\overrightarrow{AB}} \cap \overline{\mathcal{L}}^-_{\overrightarrow{AC}}$, si (A, B, C) está orientada positivamente.
  - $\overline{\mathcal{L}}^+_{\overrightarrow{AB}} \cup \overline{\mathcal{L}}^-_{\overrightarrow{AC}}$, si (A, B, C) está orientada negativamente.

- Coseno:

$$\cos\angle(BAC) = \frac{(B-A)\cdot(C-A)}{\|B-A\|\|C-A\|}$$

- Ley del coseno:

$$\|B-C\|^2 = \|B-A\|^2 + \|C-A\|^2 - 2\|B-A\|\|C-A\|\cos\angle(BAC)$$

- Seno:

$$\operatorname{sen}\angle(BAC) = \frac{(B-A)^\perp\cdot(C-A)}{\|(B-A)^\perp\|\|C-A\|}$$

- Ley de Senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\angle(CAB)}{\|B-C\|} = \frac{\operatorname{sen}\angle(ABC)}{\|C-A\|} = \frac{\operatorname{sen}\angle(BCA)}{\|A-B\|}$$

- Identidad Pitagórica:

$$\operatorname{sen}^2\angle(BAC) + \cos^2\angle(BAC) = 1$$

- Ecuaciones de rotación:

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\Theta - b\operatorname{sen}\Theta \\ a\operatorname{sen}\Theta + b\cos\Theta \end{pmatrix}$$

- Algunos ángulos notables:

Grados	**Radianes**	**Coseno**	**Seno**
0	0	1	0
30	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
90	$\pi/2$	0	1

Fórmulas Segundo Parcial

• Semiplano a la izquierda de $\mathcal{L}_{AB}$:

$$\mathcal{L}^{+}_{\overrightarrow{AB}}=\{X\in\mathbb{R}^2 : (X-A)\cdot(B-A)^{\perp}>0\}$$

• Coseno:

$$\cos\angle(BAC) = \frac{(B-A)\cdot(C-A)}{\|B-A\|\|C-A\|}$$

• Seno:

$$\operatorname{sen}\angle(BAC) = \frac{(B-A)^{\perp}\cdot(C-A)}{\|(B-A)^{\perp}\|\|C-A\|}$$

• Algunos ángulos notables:

Grados	**Radianes**	**Coseno**	**Seno**
0	0	1	0
30	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
90	$\pi/2$	0	1

• Ecuación general de primer grado: $ax+by+c=0$

• Ecuación Vectorial Paramétrica: $X = P+tU$, $t\in\mathbb{R}$

• Forma Normal: $(X-P)\cdot N = 0$

• Recta generada por Dos Puntos:

$$X = (1-t)P + tQ, \text{ con } t\in\mathbb{R}$$

• Pendiente de recta con director $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$: $m = \dfrac{d_2}{d_1}$

• Forma pendiente-intercepto: $y = mx+b$

• Forma punto-pendiente: $y-y_0 = m(x-x_0)$

• Tangente de ángulo entre rectas con pendientes m y m':

$$\tan\theta = \frac{m'-m}{1+m'm}$$

• Proyección ortogonal de X sobre la recta generada por U:

$$P_U(X) = \frac{X\cdot U}{\|U\|^2}U$$

• Proyección ortogonal de U sobre recta con vector director D, normal N y que pasa por P:

$$\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U) = P_D(U) + P_N(P)$$

• Distancia de $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ a la recta $\mathcal{L} : ax+by+c=0$:

$$\operatorname{dist}(U,\mathcal{L}) = \|U - \mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U)\| = \frac{|au+bv+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

• Reflexión de $X\in\mathbb{R}^2$ sobre la recta $\mathcal{L}$:

$$S_{\mathcal{L}}(X) = 2P_{\mathcal{L}}(X) - X$$

• Segmento $[P,Q]$:

$$[P,Q] = \{sP+tQ : s,t\geq 0,\ \text{y } s+t=1\}.$$

• Una mediana de un triángulo es una recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto.

• Una bisectriz de un triángulo es una recta bisectriz de un ángulo interior.

• Una mediatriz de un triángulo es una recta que es mediatriz de un lado del triángulo.

• Una altura de un triángulo es una recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.

• Las medianas de $\triangle(ABC)$ se intersecan en el baricentro:

$$G = \frac{1}{3}(A+B+C)$$

• Las bisectrices de $\triangle(ABC)$ se intersecan en el incentro:

$$Q=\frac{1}{L}(\|C-B\|A+\|A-C\|B+\|B-A\|C)$$

• Las mediatrices de $\triangle(ABC)$ se intersecan en el circuncentro:

$$M=\frac{(\|C\|^2-\|B\|^2)A^{\perp}+(\|A\|^2-\|C\|^2)B^{\perp}+(\|B\|^2-\|A\|^2)C^{\perp}}{2(A\cdot B^{\perp}+B\cdot C^{\perp}+C\cdot A^{\perp})}$$

• Las alturas de $\triangle(ABC)$ se intersecan en el ortocentro:

$$H=\frac{(A\cdot C-A\cdot B)A^{\perp}+(B\cdot A-B\cdot C)B^{\perp}+(C\cdot B-C\cdot A)C^{\perp}}{A\cdot B^{\perp}+B\cdot C^{\perp}+C\cdot A^{\perp}}$$

• Relación entre baricentro G, circuncentro M, y ortocentro H

$$G=\frac{2}{3}M+\frac{1}{3}H$$

• Traslación por X_0: $T_{X_0}(X)=X+X_0$
• Homotecia de razón r: $H_r(X)=rX$
• Rotación por un ángulo θ:

$$R_\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)x-\sin(\theta)y\\\sin(\theta)x+\cos(\theta)y\end{pmatrix}$$

• Reflexión respecto a la recta generada por $U=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\\mathrm{sen}(\theta/2)\end{pmatrix}$:

$$S_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)x+\sin(\theta)y\\\sin(\theta)x-\cos(\theta)y\end{pmatrix}$$

Fórmulas

• Identidad del Paralelogramo:

$$\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2.$$

• Pitágoras: X y Y son ortogonales sii

$$\|X-Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

• (A, B) en el plano está positivamente orientado si

$$B \cdot A^{\perp} > 0.$$

• (A, B, C) en el plano está positivamente orientada si

$$(B-A, C-A)$$

está positivamente orientado.

• $\cos \angle(BAC) = \frac{(B-A)\cdot(C-A)}{\|B-A\|\|C-A\|}$.

• $\operatorname{sen} \angle(BAC) = \frac{(B-A)^{\perp}\cdot(C-A)}{\|(B-A)^{\perp}\|\|C-A\|}$.

• Tangente de ángulo entre rectas con pendientes m y m':

$$\tan\theta = \frac{m'-m}{1+m'm}$$

• Proyección ortogonal de X sobre la recta generada por U:

$$P_U(X) = \frac{X \cdot U}{\|U\|^2} U$$

• Proyección ortogonal de X sobre recta con vector director D, normal N y que pasa por A:

$$\mathrm{P}_{\mathcal{L}}(X) = X + P_N(A-X)$$

• Distancia de $X = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ a la recta $\mathcal{L}$ con ecuación general $ax + by + c = 0$:

$$\operatorname{dist}(U, \mathcal{L}) = \|U - \mathrm{P}_{\mathcal{L}}(U)\| = \frac{|au + bv + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

• Reflexión de $X \in \mathbb{R}^2$ sobre la recta $\mathcal{L}$:

$$S_{\mathcal{L}}(X) = 2P_{\mathcal{L}}(X) - X$$

• Segmento $[P, Q]$:

$$[P, Q] = \{sP + tQ : s, t \geq 0, \text{ y } s + t = 1\}.$$

• Una mediana de un triángulo es una recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto.

• Las medianas de $\triangle(ABC)$ se intersecan en el baricentro:

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

• Circunferencia con centro $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y radio r:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

• Rotación por un ángulo θ:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix}$$

• Reflexión respecto a recta gen. por $U = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) \end{pmatrix}$

$$S_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x - \cos(\theta)y \end{pmatrix}$$

• Producto matricial:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

• La Matriz de la inversa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

• Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

• Regla de Cramer: $D = rA + sB + tC$ con

$$r = \frac{\det(D|B|C)}{\det(A|B|C)}, \quad s = \frac{\det(A|D|C)}{\det(A|B|C)}, \quad t = \frac{\det(A|B|D)}{\det(A|B|C)}$$

• Producto Cruz:

$$X \times Y = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

• Producto mixto:

$$X \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

• (A, B, C) en el espacio están positivamente orientados si

$$C \cdot (A \times B) > 0.$$

• Proyección de X sobre el plano generado por U, V :

$$P_{U,V}(X) = X - P_{U \times V}(X)$$

• Proyección de X sobre plano $\mathcal{P}$ que pasa por A y tiene vector normal N :

$$P_{\mathcal{P}}(X) = X + P_N(A - X)$$

• Distancia de $X = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$ al plano $\mathcal{P}$ que pasa por A y con normal N, y ecuación general $ax + by + cz + d = 0$:

$$\mathrm{dist}(X, \mathcal{P}) = \|\mathrm{P}_N(A - X)\| = \frac{|ak + bl + cm + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$