Catálogo

Álgebra Lineal – Taller de repaso parcial 1

Taller de repaso

1. Supongamos que
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   a) Encontrar $\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$, $\text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$, $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{w}\|$ y el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
   b) ¿Son los vectores $\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ y $\text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$ linealmente independientes?
   c) Encontrar vectores unitarios en las direcciones de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

2. Consideremos los vectores
$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   a) Dé un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea gen $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$. En otras palabras, determine gen $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ por medio de restricciones en las entradas.
   b) Determinar si el vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertenece a gen $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$.

3. Balancear la ecuación química
$$H_2SO_4 + Al(OH)_3 \to Al_2(SO_4)_3 + H_2O.$$

4. Supongamos que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales. Demostar que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes.

5. Supongamos que A y B son dos matrices simétricas de tamaño $n \times n$. Demostrar que la matriz AB es simétrica si y solamente si $AB = BA$.

6. Consideremos
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$
   a) Encontrar el ángulo entre los vectores $A\mathbf{u}$ y $B^T\mathbf{u}$.
   b) Determinar si la matriz AB es simétrica.

7. Supongamos que A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Se sabe que Rango$(A) = 2$. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son necesariamente correctas?
   a) El sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones
   b) El sistema de ecuaciones tiene una única solución.
   c) El sistema de ecuaciones no tiene solución.
   d) Ninguna de las anteriores.

8. Considere el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + x_3 &= 5, \\ x_1 + cx_2 - x_3 &= 1, \end{aligned}$$
   donde c es una constante.

a) ¿Para cuáles valores de c se tiene que el anterior sistema de ecuaciones tiene solución única?

b) ¿Para cuáles valores de c se tiene que el anterior sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones?

9. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + 2y - z &= 2, \\ x - 5y + z &= -5. \end{aligned}$$

De una interpretación geométrica de esta solución, es decir, determine si la solución de este sistema corresponde a un punto, una recta, un plano o todo $\mathbb{R}^3$.

10. De las definiciones de los siguientes conceptos.

a) Rango de una matriz.

b) Independencia lineal e independencia lineal de un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$.

c) Forma escalonada de una matriz $n \times n$.

d) Teorema del Rango.

11. Tres compuestos se combinan para formar tres tipos de fertilizantes. Una unidad del fertilizante del tipo **I** requiere 10 kg del compuesto A, 10 kg del B y 20 kg del C; una unidad del fertilizante del tipo **II** requiere 30 kg del compuesto A, 40 kg del B y 50 kg del C; una unidad del fertilizante del tipo **III** requiere 20 kg del compuesto A, 10 kg del B y 50 kg del C. Si hay disponible 250,000 kg del compuesto A, 200,000 kg del compuesto B y 550,000 kg del compuesto C. Se desea saber cuántas unidades de cada tipo de fertilizante se pueden producir si se usa todo el material químico disponible.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que permita resolver el problema. Defina claramente las variables a utilizar.

b) Encuentre un intervalo, para cada variable libre, donde las soluciones tienen sentido.

c) Si se tiene la cantidad mínima del fertilizante del tipo **III** ¿Cuántas unidades de cada tipo de fertilizante se puede producir?

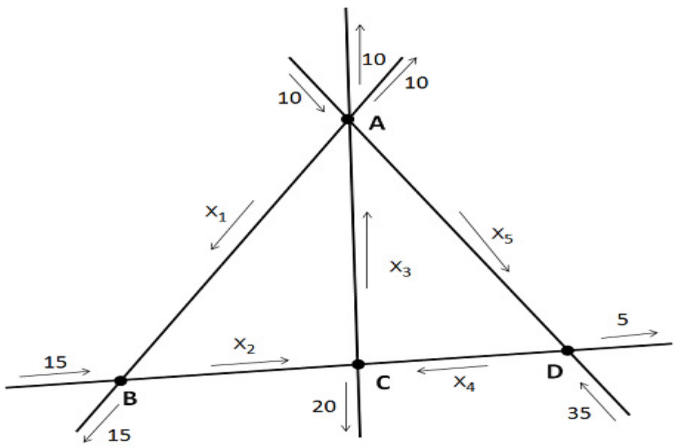
12. Considere la red de tuberías dada en la figura 1 (ver página 3), donde los flujos de agua están medidos en litros por hora.

a) Establezca y resuelva un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los flujos posibles en la red de tuberías de la figura anterior.

b) Si se cierran las tuberás $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, ¿es posible que el agua fluya respetando las direcciones indicadas en la anterior figura? Explique sus respuestas.

c) Suponiendo que las direcciones de los flujos se respetan, y que la tubería $\overline{BC}$ se cierra, halle los valores de x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 de tal forma que se obtenga el mínimo flujo de agua en la rama $\overline{AC}$.

Figura 1: Figura 1



Álgebra Lineal – Taller de repaso parcial 2

Taller de repaso

1. Encontrar la matriz estándar de cada una de las siguientes transformaciones lineales. También representar graficamente el resultado de aplicar estas transformaciones lineales a los vectores $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

   a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que se obtiene de aplicar una rotación de 45 grados en el sentido contrario de las manecillas del reloj seguido de reflexión respecto al eje x.

   b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que se obtiene como la proyección a la recta $y = 2x$ seguida de una rotación de 60 grados en el sentido de las manecillas del reloj.

   c) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que se obtiene como la proyección a la recta $y = -2x$ seguida de reflexión con respecto al eje $y = -x$.

   d) $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que se obtiene como la reflexión respecto a la recta $y = -x$ seguida de rotación de 120 grados en el sentido contrario de las manecillas del reloj

2. Recordemos que $\mathcal{P}_n$ denota el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ la función definida por
$$T(p(x)) = x^2 p'(x).$$

   a) Demostrar que T es una transformación lineal.

   b) Calcular $\dim(\text{gen}\{T(1), T(x), T(x^2)\})$.

3. Definamos $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x + y - z = 0, x + w = 0 \right\}$.

   a) Demostrar que W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

   b) Encontrar una base para W.

   c) Encontrar la dimensión de W.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Encontrar la matriz estándar de T.

   b) Determinar si T es una transformación invertible.

   c) Encontrar bases para $\text{Col}(A)$, $\text{Ren}(A)$ y $\text{Nul}(A)$, donde A es la matriz encontrada en el numeral a).
   Nota: En algunos libros se utiliza la notación $\text{Ker}(A)$ para $\text{Nul}(A)$, es decir, $\text{Ker}(A)$ y $\text{Nul}(A)$ significan lo mismo.

5. Supongamos que V es un espacio vectorial con $\dim(V) = 4$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Si v_1, v_2, v_3, v_4 son vectores en V entonces $V = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

b) Si v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 son vectores en V entonces estos vectores son linealmente dependientes.

c) Si v_1, v_2, v_3, v_4 son vectores en linealmente independientes, entonces $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base para V.

6. Sea $V = \{A \in M_{3\times 3} \mid A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0\}$. En otras palabras V es el conjunto de matrices 3×3 cuyas entradas en la diagonal principal son 0.

   a) Demostrar que V es un subespacio vectorial de $M_{3\times 3}$

   b) Encontrar una base para V.

   c) Encontrar la dimensión de V.

7. Consideremos el conjunto $Z = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathcal{P}_3 \mid a_0 = a_3\}$.

   a) Demostrar que Z es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$.

   b) Encontrar una base para Z y calcular su dimensión.

8. Sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ z+x \end{bmatrix}.$$

   Determinar si S es invertible. En caso afirmativo encontrar S^{-1}.

9. De ejemplos concretos de las siguientes situaciones.

   a) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(e_1)$ y $T(e_2)$ son linealmente dependientes.

   b) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\dim(\text{gen}\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}) = 1$.

   c) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\dim(\text{gen}\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}) = 2$. ¿Es posible encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\dim(\text{gen}\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}) = 3$?

   d) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que es sobreyectiva. ¿Es posible encontrar una transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que sea sobreyectiva?

   e) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que sea inyectiva. ¿Es posible encontrar una transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que sea inyectiva?

10. Sea $U = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$. Encontrar una base para U y determinar si U es un punto, una linea, un plano o todo $\mathbb{R}^3$.

Álgebra Lineal – Taller de repaso parcial 3

Taller de repaso

1. Sea A una matriz 2×2 cuyos valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y cuyos espacios propios correspondientes son $E_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $E_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) ¿Es A una matriz invertible?

   (b) ¿Es A diagonalizable? En caso que lo sea, encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$.

   (c) Encuentre A y A^{10}.

2. Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - z + w = 0,\ 2y + z + w = 0 \right\}$.

   (a) Encuentre una base ortonormal para W.

   (b) Encuentre una base ortonormal para $W^\perp$.

   (c) Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre $\text{proy}_W(\mathbf{v})$ y $\text{proy}_{W^\perp}(\mathbf{v})$.

3. Encontrar una base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Diagonalizar ortogonalmente la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   En otras palabras, encontrar una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $B = QDQ^T$.

5. Un estudiante se encuentra estudiando las asignaturas de cálculo y álgebra lineal. Para combinar sus estudios el estudiante decide seguir la siguiente regla de estudio:

   (a) Si un día el estudiante estudia cálculo, entonces al día siguiente estudia cálculo con una probabilidad de 0.5 y estudia álgebra lineal con una probabiliad de 0.5.

   (b) Si un día el estudiante estudia álgebra lineal, entonces al día siguiente estudia cálculo con una probabilidad de 0.3 y estudia álgebra lineal con una probabiliad de 0.7.

   Suponga que el estudiante continua con este habito de estudio y que este proceso es una cadena de Markov.

   (I) Encontrar la matriz de transición (también llamada matriz estocástica) en esta cadena de Markov.

   (II) Si el estudiante estudió un lunes cálculo, ¿con qué probabilidad el estudiante estudia álgebra lineal los días martes, miércoles y jueves de la misma semana?

(III) ¿cuáles son las tendencias de estudio en el largo plazo, es decir, en el largo plazo con cuál probabilidad el estudiante estudia cálculo y con cuál probabilidad estudia álgebra lineal?

6. Sea

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre bases ortogonales para $\mathrm{Col}(E)$, $(\mathrm{Col}(E))^{\perp}$, $\mathrm{Nul}(E)$ y $(\mathrm{Nul}(E))^{\perp}$.

7. Sea

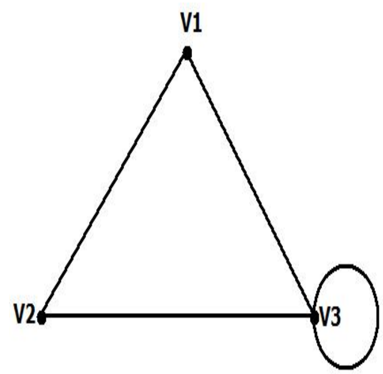
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre $A^5\mathbf{x}$.

8. (a) Supongamos que A y B son matrices $n \times n$ y que B es invertible. Demostrar que $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

   (b) Supongamos que A es una matriz $n \times n$. Demostrar A y A^T tienen el mismo polinomio característico.

9. Considere el grafo dado en la siguiente figura.



   (a) Encontrar la matriz de adyacencia de este grafo

   (b) Encontrar el núero de 3-trayectorias desde el vértice v_1 hasta el vértice v_2.

10. Encontrar todos los valores de k para los cuales la matriz

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{bmatrix}$$

es invertible.

11. Consideremos la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Encuentre un dígrafo cuya matriz de adyacencia sea B.

   (b) ¿Cuántas 3 trayectorias que respeten el sentido del dígrafo encontrado en el numeral (a) desde el vértice 1 hasta el vértice 3?

(c) ¿Qué significado tiene la entrada $(3,2)$ de la matriz B^{10}?

12. Sea $V = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Encuentre una base ortonormal para V.

13. Sea A una matriz 4×4 tal que su polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$ Determine si A es diagonlizable o no.

14. Supongamos que $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

    (a) C y D son matrices semejantes.
    (b) C y D **NO** son matrices semejantes.
    (c) No se puede determinar con la información dada si C y D son matrices semejantes.